

問1. x の函数 y に関する次の微分方程式を解け.

ヒント: 解の見当をつける際には, 積分などは思い切っておおらかに計算してしまうのがよい.

$$\begin{array}{lll} 1) y' = y^2 & 2) xy' = y & 3) y' = \frac{2y+x}{x} \\ 4) y' + y \cos x = \sin x \cos x & 5) y' + 2xy = x & 6) y' + \frac{y}{x} = x \\ 7) (5x+4y+1)dx + (4x+2y+3)dy = 0 \\ 8) \sin y dx + (1+x \cos y)dy = 0 \\ 9) y = xy' + y'^2 & 10) y = xy' - e^{y'} \end{array}$$

問2. 行列 X が以下に等しい場合に, $\exp X$ と $\exp(tX)$ をそれぞれ求めよ¹. 指数函数や三角函数がテーラー展開可能であること, またその展開は既知としてよい.

ヒント: Jordan 標準形に持ち込むのは常に得策というわけではない.

$$\begin{array}{lll} 1) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & 2) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & 3) \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 但し } s \text{ は実定数とする.} \\ 4) \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 13 & -7 \\ -5 & 19 & -10 \end{pmatrix} & 5) \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} & 6) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

問3. 以下の常微分方程式を解け.

$$1) \begin{cases} y_1' = y_1 + 3y_2 - 2y_3 \\ y_2' = -3y_1 + 13y_2 - 7y_3 \\ y_3' = -5y_1 + 19y_2 - 10y_3 \end{cases} \quad 2) \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ y_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

問4. 以下の $y = y(x)$ に関する常微分方程式の一般解を求めよ.

$$\begin{array}{l} 1) y'' + 3y' + 2y = 0 \\ 2) y^{(3)} - 2y'' - y' + 2y = 0 \\ 3) y^{(4)} - 4y^{(3)} + 6y'' - 4y' + y = 0 \\ 4) y^{(4)} + 2y'' + y = 0 \end{array}$$

問5. f を \mathbb{R} 上の \mathbb{R} 値函数とする. このとき微分方程式

$$\frac{df}{dx}(x) = 3f(x) + xe^{3x}, \quad f(0) = 0$$

を以下の手順に従って解け.

$$1) \text{ まず } \frac{df}{dx}(x) = 3f(x) \text{ を解く (解は } f(x) = Ce^{3x}, C \in \mathbb{R} \text{)}$$

¹4), 5), 6) は線型代数演習 齋藤正彦著 東京大学出版会より改題.

- 2) f が $\frac{df}{dx}(x) = 3f(x) + xe^{3x}$ の解であったとして, $g(x) = f(x)e^{-3x}$ とおき, g のみたすべき微分方程式を求める.
- 3) 上で求めた微分方程式を解き, 初期条件 ($f(0) = 0$) をみたす解を選ぶ.

問 6. 1) 微分方程式

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$$

の $\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ をみたす解をそれぞれ求めよ.

ヒント: まず y_2 について微分方程式を解いてみよ.

- 2) 1) で得た解をそれぞれ Y_1, Y_2 として, 行列値函数 Λ を $\Lambda(x) = (Y_1(x) \ Y_2(x))$ により定める (Λ は定義により基本解行列である). $\Lambda(x)$ は任意の x について正則であることを確かめよ.
- 3) 2) で作った基本解行列 Λ を用いて微分方程式

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} xe^{\frac{1}{2}x^2} \\ e^{\frac{1}{2}x^2} \end{pmatrix}$$

の一般解を求めよ.

問 7. x の函数 y に関する常微分方程式

$$(*) \quad y'' + Py' + Qy = 0, \quad P, Q \text{ は } \mathbb{R} \text{ 上定義された } x \text{ の連続函数}$$

を考える. 以下では (連続な係数を持つ) 線型常微分方程式に関する解の存在と一意性を用いてよい.

- 1) $(*)$ の解 y が $y(0) = y'(0) = 0$ を満たすならば y は恒等的に 0 であることを示せ.
- 2) y を $(*)$ の解であって, 恒等的には 0 ではないものとする. また, $x_0 \in \mathbb{R}$ について $y(x_0) = 0$ であるとする (x_0 は y の零点であるなどという). このとき, ある $\epsilon > 0$ が存在し, $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ における y の零点は x_0 のみであることを示せ. すなわち, $x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$, $x \neq x_0$ であれば $y(x) \neq 0$ であるような $\epsilon > 0$ が存在することを示せ.
- 3) $(*)$ の一組の基本解を y_1, y_2 とする. a, b を y_1 の零点であって, 开区間 (a, b) には y_1 は零点を持たないとする. このとき, y_2 は (a, b) に零点を唯一つ持つことを示せ.
- 4) y を $(*)$ の恒等的には 0 ではない解とし, $J = [a, b]$ を (有界な) 閉区間とすると, y の J における零点は有限個であることを示せ.

ヒント: 任意の $x \in J$ について x を含む开区間であって, そこにおける y の零点は高々 1 個であるようなものがとれることが示せたとする. J はコンパクトなのでハイネ・ボレルの定理 (任意の開被覆が有限部分被覆を持つ) を利用できる.

問 8. x の函数 $y_n, n = 1, 2, \dots$, を条件

$$\frac{dy_1}{dx}(x) = xy_1(x), y_1(0) = 1,$$

$$\frac{dy_n}{dx}(x) = xy_n(x) + y_{n-1}(x), y_n(0) = 1$$

により定める. このとき, $y_n, n = 1, 2, \dots$, を具体的に求めよ. また, $y(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n(x)$ とするとき, y を求めよ.

問 9. x の函数 y に関する微分方程式 $y' = -2xy, y(0) = 1$ の解を g とする.

1) 解 g を求めよ.

2) $f(x, y) = -2xy$ として, $y_0(x) = 1, y_n(x) = y_0 + \int_0^x f(t, y_{n-1}(t))dt$ と定めるとき, $y_n(x), n = 1, 2, \dots$, を具体的に求めよ.

3) 函数 y_n は任意の閉区間 $[0, c]$ 上で函数 g に一様収束することを示せ.
ただし, 必要であればテーラーの定理 (の特別な場合)

g を \mathbb{R} 上定義された C^∞ 級の函数とすると, 函数 R_n を

$$R_n(x) = g(x) - \left(g(0) + g'(0)x + \frac{g^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{g^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} \right),$$

ただし, $g' = \frac{dg}{dx}, g^{(k)} = \frac{d^k g}{dx^k}$, で定めると, ある $a \in (0, x)$ に対して

$$R_n(x) = \frac{g^{(n)}(a)}{n!}x^n$$

が成り立つ.

を用いてよい. また, 前問の y_n についても調べてみよ.

問 10. 微分方程式 $y' = -2xy^2, y(0) = 1$ の解を g とし, これを逐次近似法で求めてみる².

1) $f(x, y) = -2xy^2$ として, $y_0(x) = 1, y_n(x) = y_0 + \int_0^x f(t, y_{n-1}(t))dt$ とするとき, $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ を具体的に求めよ.

2) 解 g を求めよ.

3) y_n は任意の閉区間 $[0, c]$ 上で g に一様収束することを示せ.

4) $x > 0$ とする. $g(x)$ を

$$g(x) = g(0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{g^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{g^{(n)}(\xi_n)}{n!}x^n$$

と表すことができるが (ただし, ξ_n は $0 < \xi_n < x$ をみたす実数である. ξ_n を具体的に求める必要はない), 上の式 (の各項) を具体的に計算せよ.

²解の存在を示したときの方法を実際に適用してみる.

5) 4) において $R_n = \frac{g^{(n)}(\xi_n)}{n!} x^n$ と置く. $x > 1$ であると R_n は 0 に収束しないことを示せ. また, g の 0 におけるテーラー級数の収束半径を求めよ.

本当は 2) と 3) は逆で, y_n がどんな函数に収束するか考察して (当たりをつけて) それに本当に収束していることを示すのが本筋である. 一方, 次の問にある函数のように, テーラー級数は明示的に求まるが, それを初等的に (よく知られている函数を組み合わせて, 積分などを用いずに) 表すことができないものもある.

問 1 1. $I = (-1, 1)$ とし, I 上の函数 f を $t \in I$ について

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

と置くことにより定める.

- 1) f の $t = 0$ を中心とするテーラー級数 (剰余項のないテーラー展開) を求めよ. また, 求めた級数 (冪級数) の収束半径を求めよ.
- 2) I 上の函数 g を $x \in I$ について

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x \sin \theta) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-x^2 \sin^2 \theta}} \end{aligned}$$

により定める. g の $x = 0$ を中心とするテーラー級数を求めよ. また, 求めた級数 (冪級数) の収束半径を求めよ.

右辺の積分はいわゆる楕円積分で, 明示的に求めることはできないことが知られている. 従って積分を実行してからテーラー級数を求めることはできない.

問 1 2. 1) $a = a(x)$ を $x \in \mathbb{R}$ の連続函数とし, y に関する微分方程式 $y' = ay$ を考える. f を一つの解とする. ある $T > 0$ が存在して a が $a(x+T) = a(x)$ を充たすならば, $g(x) = f(x+T)$ で定まる函数 g も解であることを示せ.

- 2) 解の一意性を用いて $g(x) = cf(x)$ を充たす実数 c が唯一存在することを示せ.
- 3) $c < 0$ ($c > 0$) であれば $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ ($\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$) が成り立つことを示せ.
- 4) $c = 1$ であれば $|f(x)|$ は $x \rightarrow +\infty$ の時有限であることを示せ. すなわち, ある実数 M, x_0 が存在し, $x > x_0$ のとき $|f(x)| \leq M$ であることを示せ. また, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ が存在しないような例を挙げよ.

問 1 3. Ψ を条件

$$\forall \epsilon > 0, \exists M > 0 \text{ s.t. } x > M \Rightarrow |\Psi(x, y)| < \epsilon$$

をみたす $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ の C^1 級の函数とする. x の函数 y についての常微分方程式 $y' = \Psi(x, y)$ の解 f であって, $(0, \infty)$ 上で定義され, かつ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ なるものが存在するような Ψ の例を挙げよ.

問 1 4 . 以下のベクトル場 X の積分曲線であって , $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ を通るものを求めよ .

- 1) $X(x, y) = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$.
- 2) $X(x, y) = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$.
- 3) $X(x, y) = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + y^2 \frac{\partial}{\partial y}$.

問 1 5 . 2つの C^∞ 級の曲線 $\varphi(t), \psi(t)$ が $t = t_0$ で交わるとする . つまり $\varphi(t_0) = \psi(t_0) \in \mathbb{R}^2$ が成り立つとする . この交点を p とし , φ, ψ が p でなす角を , p における φ, ψ の接線のなす角と定める .

- 1) $\varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix}, \psi(t) = \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{pmatrix}$ と座標を用いて表す . $\varphi(t), \psi(t)$ が $t = t_0$ で直交するための条件を式で表せ .
- 2) 2つのベクトル場 $X(x, y) = a_1(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + a_2(x, y) \frac{\partial}{\partial y}, Y(x, y) = b_1(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + b_2(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$ が条件 $a_1(x, y)b_1(x, y) + a_2(x, y)b_2(x, y) = 0$ をみたすとする . このとき , X, Y の積分曲線は交わるのであれば直交することを示せ . ただし , X, Y はいずれも零ベクトル $\left(= 0 \frac{\partial}{\partial x} + 0 \frac{\partial}{\partial y}\right)$ にはならないとする .

問 1 6 . $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x, y) \neq (0, 0)\}$ と定める . X を U 上の C^∞ 級のベクトル場であって , 任意の $p \in U$ について $X(p) \neq 0$ (零ベクトル) であるとする .

- 1) φ を X の積分曲線であって , \mathbb{R} 上定義されているものとする . 次の (a) あるいは (b) が成り立つことを示せ :
 - (a) φ のグラフは自分自身とは交わらない , つまり , $\varphi(t) = \varphi(s)$ であれば $t = s$ が成り立つ .
 - (b) ある $T > 0$ が存在して $\varphi(t + T) = \varphi(t)$ が任意の実数 t について成り立つ .
- 2) 最初の仮定をみたすベクトル場であって , 性質 (a) を持つ積分曲線が存在するもの , 性質 (b) を持つ積分曲線が存在するものをそれぞれ一つずつ挙げよ (同じベクトル場でも , 別々のベクトル場でも構わない) .

問 1 7 . 全微分方程式 $f(x, y)dx + g(x, y)dy = 0$ について考える . この問では , 函数や変数による割り算などはおおらかに考えてよいことにする .

- 1) f が x と y の C^∞ 級函数であるとき , $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ と定める . 右辺は係数に表れる函数が 0 なら 0 とみなす . つまり , $0dx + 0dy$ を 0 と表す . さて , x の函数 h が $\frac{dy}{dx} = -\frac{f(x, y)}{g(x, y)}$ の解であったとする . また , $\varphi = \varphi(x, y)$ が $d\varphi = fdx + gdy$ をみたすとする . このとき , $\psi(x) = \varphi(x, h(x))$ と定めると $\frac{d\psi}{dx} = 0$ が成り立つことを示せ .
 逆に , 次のように考えることができる . 方程式 $\frac{dy}{dx} = -\frac{f}{g}$ を解くのに , 全微分方程式 $fdx + gdy = 0$ を考える . もし $d\varphi = fdx + gdy$ をみたすような $\varphi(x, y)$ を

- 見つけることができたとすると, $\varphi(x, y) = c$ (定数) を y について解けば元の方程式の解が得られたことになる. 一方 $f(x, y)dx + g(x, y)dy = 0$ という方程式の解は $(f(x, y)dx + g(x, y)dy)(X) = 0$ をみたすベクトル X と考えるのが良く, そして, 元の方程式の解のグラフは X の積分曲線と考えることができるのであった.
- 2) $d\varphi = fdx + gdy$ なる φ が存在したとすると, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$ が成り立つことを示せ. 適切に定義をすると, この事実は $d(fdx + gdy) = 0$ と表すことができる.

(以上)

(かなり) 略解

以下の略解はかなり端折っているため、各自細部を補うこと。

1) 変数分離型の方程式 $y(x)$ が 0 をとらないとすると、

$$\begin{aligned}y' &= y^2 \\ \Rightarrow \frac{1}{y^2} y' &= 1 \\ \Rightarrow \int \frac{1}{y^2} \frac{dy}{dx} dx &= \int dx \\ \Rightarrow \int \frac{1}{y^2} dy &= \int dx \\ \Rightarrow -\frac{1}{y} &= x + C \quad (C \text{ は任意定数}) \\ \Rightarrow y &= -\frac{1}{x + C}\end{aligned}$$

また、 $y(x) \equiv 0$ も解である。よって³解は $y = -\frac{1}{x + C}$ または $y \equiv 0$ (恒等的に 0)。

2) 変数分離型の方程式 $y(x)$ が 0 をとらないとする。

$$\begin{aligned}xy' &= y \\ \Rightarrow \frac{y'}{y} &= \frac{1}{x} \\ \Rightarrow \int^x \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} dx &= \int \frac{1}{x} dx \\ \Rightarrow \log |y| &= \log |x| + C_1 \quad (C_1 \text{ は任意定数}) \\ \Rightarrow y &= \pm e^{C_1} x\end{aligned}$$

ここで $\pm e^{C_1}$ の部分は 0 でない定数 C_2 に置き換えることができる。また、 $y \equiv 0$ も解なので、解は $y(x) = Cx$ ($C \in \mathbb{R}$)。

3)

$$\begin{aligned}y' &= \frac{2y + x}{x} \\ \Rightarrow y' &= 2\frac{y}{x} + 1\end{aligned}$$

より、同次型の方程式である。 $u(x) = \frac{y(x)}{x}$ とおくと、 $y(x) = xu(x)$ より $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$ が従う。よって

$$\begin{aligned}u + xu' &= 2u + 1 \Rightarrow \frac{1}{u+1} u' = \frac{1}{x} \Rightarrow \int^u \frac{1}{u+1} du = \int^x \frac{1}{x} dx \\ \Rightarrow \log |u+1| &= \log |x| + C_1 \quad (C_1 \text{ は任意定数}) \\ \Rightarrow u &= -1 \pm e^{C_1} x\end{aligned}$$

³たとえばここはなぜ「よって」なのか考える必要がある。以下では注意しない。

このことから $u = Cx - 1$ ($C \in \mathbb{R}$) と書けることがわかる。 $u = \frac{y}{x}$ であったので $y(x) = Cx^2 - x$ が解となる。

4) 一階線型微分方程式である。式の両辺に $e^{\sin x}$ を掛けると

$$y'e^{\sin x} + ye^{\sin x} \cos x = e^{\sin x} \sin x \cos x \Rightarrow \frac{d}{dx}(ye^{\sin x}) = e^{\sin x} \sin x \cos x \\ \Rightarrow ye^{\sin x} = \int^x e^{\sin x} \sin x \cos x dx$$

さて、この右辺の積分は $t = \sin x$ と変数変換すると

$$\int^x e^{\sin x} \sin x \cos x dx = \int^t e^t t \cos x \frac{1}{\cos x} dt = \int^t te^t dt = te^t - e^t + C \quad (C \text{ は任意定数})$$

と計算できる。変数を t から x に戻して

$$ye^{\sin x} = e^{\sin x} \sin x - e^{\sin x} + C \Rightarrow y = Ce^{-\sin x} + \sin x - 1$$

よって解は $y(x) = Ce^{-\sin x} + \sin x - 1$ 。

5) 一階線型微分方程式である。式の両辺に e^{x^2} を掛けると

$$y'e^{x^2} + 2xe^{x^2}y = xe^{x^2} \Rightarrow \frac{d}{dx}(ye^{x^2}) = xe^{x^2} \Rightarrow ye^{x^2} = \int^x e^{x^2} dx \\ \Rightarrow ye^{x^2} = \frac{1}{2}e^{x^2} + C \quad (C \text{ は任意定数})$$

よって解は $y(x) = Ce^{-x^2} + \frac{1}{2}$ 。

6) 一階線型微分方程式。式の両辺に x を掛けると

$$xy' + y = x^2 \Rightarrow \frac{d}{dx}(xy) = x^2 \Rightarrow xy = \frac{1}{3}x^3 + C \quad (C \text{ は任意定数})$$

よって解は $y(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{C}{x}$ となる。

7) 全微分方程式である。これが完全微分型であることが、

$$\frac{\partial}{\partial y}(5x + 4y + 1) = 4 = \frac{\partial}{\partial x}(4x + 2y + 3)$$

であることからわかる。そこで $\phi(x, y)$ を

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 5x + 4y + 1, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = 4x + 2y + 3$$

が成り立つように定めたい。第1式を x について積分して

$$\phi(x, y) = \frac{5}{2}x^2 + 4xy + x + f(y) \quad (f(y) \text{ は } y \text{ のみによる関数})$$

が得られる。これを第2式に代入すると

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{5}{2}x^2 + 4xy + x + f(y) \right) = 4x + 2y + 3 \\ \Rightarrow 4x + f'(y) = 4x + 2y + 3$$

これより $f'(y) = 2y + 3$ 。よって $f(y) = y^2 + 3y + C$ (C は任意定数) となる。よって

$\phi(x, y) = \frac{5}{2}x^2 + 4xy + x + y^2 + 3y + C$ と置き、求める解は

$$\frac{5}{2}x^2 + 4xy + y^2 + x + 3y = C_1 \quad (C_1 \text{ は任意定数})$$

となる .

8) 全微分方程式 . これが完全微分型であることが

$$\frac{\partial}{\partial y}(\sin y) = \cos y = \frac{\partial}{\partial x}(1 + x \cos y)$$

であることからわかる . そこで $\phi(x, y)$ を

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \sin y, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = 1 + x \cos y$$

が成り立つように定めたい . 第 1 式を x について積分して

$$\phi(x, y) = x \sin y + g(y) \quad (g(y) \text{ は } y \text{ のみによる関数})$$

が得られる . これを第 2 式に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}(x \sin y + g(y)) &= 1 + x \cos y \\ \Rightarrow x \cos y + g'(y) &= 1 + x \cos y \end{aligned}$$

が得られる . これより $g'(y) = 1$ が従い , $g(y) = y + C$ (C は任意定数) がわかる . よって $\phi(x, y) = x \sin y + y + C$ とおけて , 求める解は

$$x \sin y + y = C_1 \quad (C_1 \text{ は任意定数})$$

となる .

9) クレーロー型の方程式 . この式の両辺を x で微分して

$$\begin{aligned} y' &= y' + xy'' + 2y'y'' \\ \Rightarrow (x + 2y')y'' &= 0 \end{aligned}$$

が得られる . このことから

$$x + 2y' = 0 \text{ または } y'' = 0$$

が従う . 第 2 式からは $y(x) = c_1x + c_2$ (c_1, c_2 は任意定数) とおけることがわかる . この式をもとの式 $y = xy' + y'^2$ に代入すると

$$c_1x + c_2 = xc_1 + c_1^2 \Rightarrow c_2 = c_1^2$$

が得られ、結局第 2 式から微分方程式の解 $y(x) = Cx + C^2$ (C は任意定数) を得る . また第 1 式 $x + 2y' = 0$ について , これを y' について解いた $y' = -\frac{1}{2}x$ を問題の式 $y = xy' + y'^2$ に代入して

$$y = x \left(-\frac{1}{2}x\right) + \left(-\frac{1}{2}x\right)^2 \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x^2$$

を得る . こうして得られた $y(x) = -\frac{1}{4}x^2$ も解である .

よって解は $y(x) = Cx + C^2, y(x) = -\frac{1}{4}x^2$ である .

10) クレーロー型の方程式 . この式の両辺を x で微分して

$$\begin{aligned} y' &= y' + xy'' - y''e^{y'} \\ \Rightarrow (x - e^{y'})y'' &= 0 \end{aligned}$$

が得られる．よって

$$x - e^{y'} = 0 \text{ または } y'' = 0$$

が従う．第2式から $y(x) = c_1x + c_2$ (c_1, c_2 は任意定数) とおけることがわかる．この式を問題の式に代入すると

$$c_1x + c_2 = xc_1 - e^{c_1} \Rightarrow c_2 = -e^{c_1}$$

が得られ，結局第2式から微分方程式の解 $y(x) = Cx - e^C$ (C は任意定数) を得る．

また第1式 $x - e^{y'} = 0$ について、これを y' について解いた $y' = \log x$ を問題の式 $y = xy' - e^{y'}$ に代入して

$$y = x \log x - x$$

が得られる．こうして得られた $y(x) = x \log x - x$ も解である．

よって解は $y(x) = Cx - e^C, y(x) = x \log x - x$ である．