２０１３年度数学 II 演習（理 I 37–39 組）　第６回　　　　　　'13/6/25（火）４限
訂正:'13/6/25 問 6.1，6.4，6.6，6.7，6.9 を修正．

以下では特に断らない限り $K = \mathbb{R}$ もしくは $K = \mathbb{C}$ とする．

注． １．発表に限らず，解答を作成する際には「明らか」乃至これに類する文言は原則として用いないこと．
２．よく分からなくなってしまったら，まずは K を $\mathbb{R}$ と読み替え，K^n は $\mathbb{R}^n$ あるいは $\mathbb{R}^2$，$\mathbb{R}^3$ 位に考えておき，改めて一般の場合を考えてみよ．
３．ヒントは多くの場合非自明な主張からなる．ヒントに書いてあることもきちんと証明すること．

問 6.1. $V = \{$ 高々 2 次の t に関する K の元を係数とする多項式全体 $\}$ と置く．V は多項式の和，定数倍（スカラー倍）に関して線型空間である．

1) $\varphi\colon K^3 \to V$ を
$$\varphi\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_0 + x_1 t + x_2 t^2$$
により定める．φ は K-線型同型写像であることを示せ．また，φ^{-1} がどのような写像であるか簡潔に説明せよ．
2) $F\colon V \to V$ を
$$F(f) = \frac{df}{dt}$$
により定める．例えば $f(t) = 1 + t^2$ ならば $F(f)(t) = 2t$ である．$f \in V$ について，確かに $F(f) \in V$ であることを示せ．また，F は K-線型写像であることを示せ．
3) $G = \varphi^{-1} \circ F \circ \varphi\colon K^3 \to K^3$ と置く．G の表現行列を求めよ．

問 6.2. $f\colon K^n \to K^m$, $g\colon K^m \to K^n$ を K-線型写像とし，$g \circ f = \mathrm{id}_{K^n}$，$f \circ g = \mathrm{id}_{K^m}$ がそれぞれ成り立つとする．このとき，$n = m$ であって，$g = f^{-1}$ が成り立つことを示せ．

従って K^n と K^m が K-線型同型なのは $n = m$ の時，その時のみである．

定義 6.3 (仮の定義．この定義は次元の通常の定義と一致するが，標準的な定義ではない．標準的な定義は冬学期に改めて扱う)．V を K-線型空間とする．ある $n \in \mathbb{N}$ について V が K^n と K-線型同型であるとき，V は（K 上）**有限次元**であると言い，V の（K 上の）**次元**を n と定める．V の次元を $\dim V$ あるいは $\dim_K V$ で表す．V が（K 上）有限次元でないことを V は（K 上）**無限次元**であると言う．このとき，しばしば $\dim_K V = +\infty$ と表すが,「無限」には種類があり，この記法は曖昧なので注意が必要である（最初のうちは用いない方がよい）．

問 6.4. $f\colon K^n \to K^n$, $g\colon K^n \to K^n$ を K-線型写像とし，$g \circ f = \mathrm{id}_{K^n}$ が成り立つとする．このとき f は K-線型同型写像であって，$g = f^{-1}$ が成り立つことを示せ．

問 6.2 と問 6.4 は同じことを別の言い方で述べているように見えるかも知れないが，問 6.5 と問 6.6 に見るようにこれらは異なる．

問 6.5. $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ とし，$A_1 = \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} \in M_{n+1,n}(K)$, $A_2 = (A^{-1} \;\; 0) \in M_{n,n+1}(K)$ と置く．$f\colon K^n \to K^{n+1}$, $g\colon K^{n+1} \to K^n$ をそれぞれ $f(v) = A_1 v$, $g(w) = A_2 w$ により定める．

1) f, g は K-線型写像であることを示せ．
2) $g \circ f = \mathrm{id}_{K^n}$ かつ $f \circ g \neq \mathrm{id}_{K^{n+1}}$ が成り立つことを示せ．

従って問 6.2 において仮定 $g \circ f = \mathrm{id}_{K^n}$ あるいは $f \circ g = \mathrm{id}_{K^m}$ の一方を外すことはできない．また，問 6.4 において f を K^n から K^m（$m \neq n$）への線型写像とすると，やはり結論が成り立たない．問 6.4 に関しては次のことにも注意が必要である．

問 6.6. $V = K[\,t\,]$ とする．$\varphi\colon V \to V$ を $f \in V$ について $\varphi(f)(t) = \displaystyle\int_0^t f(s)ds$ と置くことにより定め，また，$\psi\colon V \to V$ を $f \in V$ について $\psi(f)(t) = \dfrac{df}{dt}(t)$ と置くことにより定める．

1) $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_V$ が成り立つことを示せ．また，$\varphi \circ \psi \neq \mathrm{id}_V$ が成り立つことを示せ．
2) $\{f \in V \mid \varphi \circ \psi(f) = 0\}$ を簡潔に表せ．

従って，問 6.4 で K^n の代わりに一般の線型空間を考えると必ずしも結論は成り立たない．

問 6.7. $V = \{\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ a_n \in K\}$ を K の元からなる数列全体のなす線型空間とする．また，V の部分集合 W を $W = \{\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in V \mid a_{n+2} + a_{n+1} + a_n = 0\}$ と置く．

1) 線型写像 $f, g\colon V \to V$ であって，$g \circ f = \mathrm{id}_V$ であるが $f \circ g \neq \mathrm{id}_V$ であるような例を一組挙げよ．
2) W は V の部分線型空間であることを示せ．
3) W は有限次元である．$\dim W$ を求めよ．また，$K^{\dim W}$ から V への線型同型写像を一つ挙げよ．
   ヒント：次元の通常の定義を知っていればそれを用いても良い．この講義・演習の範囲では次元を求めるためには m の見当をつけて K^m から V への線型同型写像を一つ構成し，定義 6.3 を用いる必要がある．
4) $K^{\dim W}$ から W への線型同型写像を二つ挙げよ（一つは 3) で挙げたものを用いて良い）．
5) V は有限次元でない（無限次元である）ことを示せ．

問 6.8. 1) $V = \{f\colon K^n \to K^m \mid f$ は K-線型写像$\}$ とする．$f \in V$ に表現行列を対応させると V から $M_{m,n}(K)$ への全単射が得られることを示せ．

2) $V = \{f\colon K^n \to K^n \mid f$ は K-線型同型写像$\}$ とする．$f \in V$ に表現行列を対応させると V から $\mathrm{GL}_n(K)$ への全単射が得られることを示せ．

問 6.9. K^3 の部分集合 V_k を

$$V_k = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \; x_1^k + x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

により定める．ただし，$k \in \mathbb{N}$ とし，$x_1^0 = 1$ とする．V_k は K^3 の部分線型空間であるか，理由（証明）と共に述べよ．

問 6.10. K^5 の部分集合 V を以下のように定める．V は K^5 の部分線型空間であることを示し，次元を求めよ．

1) $V = \left\{ v \in K^5 \middle| \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -4 & 5 & 4 \end{pmatrix} v = 0 \right\}.$

2) $V = \left\{ v \in K^5 \middle| \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & -4 & -5 & -16 \end{pmatrix} v = 0 \right\}.$

問 6.11. $A \in M_{m,n}(K)$, $w \in K^m$ とし，$v \in K^n$ に関する方程式 $Av = w$ を考える．

1) $\{v \in K^n \mid Av = 0\}$ は K^n の部分線型空間であることを示し，次元を求めよ．
2) $\{w \in K^m \mid Av = w$ は解を持つ $\}$ は K^m の部分線型空間であることを示し，次元を求めよ．

問 6.12. 線型空間 V と，その部分線型空間 W_1, W_2（3) は W_1, W_2, W_3）を以下のように定める（W_1, W_2, W_3 が部分線型空間であることは認めて良いが，確かめておくこと）．

i) $W_1 \cap W_2$ を求めよ．
ii) $W_1 + W_2$（3) は $W_1 + W_2 + W_3$）を簡潔に表し，直和であるか調べよ．

1) $\lambda, \mu \in K$ とし，

$$\begin{aligned} V &= K^3, \\ W_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \; x_1 + x_2 = 0 \right\}, \\ W_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \; x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0, \; \mu x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \right\} \end{aligned}$$

とする．

2) $V = K[t]$, $W_1 = \{f \in V \mid f(-t) = f(t)\}$, $W_2 = \{f \in V \mid f(-t) = -f(t)\}$ とする．

3) $a, b, c, d \in K$ とし，

$$
\begin{aligned}
V &= K^4, \\
W_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \ \exists \lambda \in K \ \text{ s.t. } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}, \\
W_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \ \exists \lambda \in K \ \text{ s.t. } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \right\}, \\
W_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \ x_3 = x_4 = 0 \right\}
\end{aligned}
$$

とする．

問 6.13. V を線型空間，W を V の部分線型空間とする．

1) U を線型空間，$f\colon V \to U$ を線型写像とする．$f(W) = \{u \in U \mid \exists w \in W \ \text{ s.t. } u = f(w)\}$ と置くと $\operatorname{Im} f$ は U の部分線型空間であることを示せ．
2) X を線型空間．$g\colon X \to V$ を線型写像とする．$g^{-1}(W) = \{x \in X \mid g(x) \in W\}$ と置くと $g^{-1}(W)$ は X の部分線型空間であることを示せ．
注意：「$g^{-1}(W)$」は全体として一つの記号である．g^{-1} が存在して，1) の意味で $g^{-1}(W)$ を考えているという意味ではない．しかし，たまたま g^{-1} が存在する場合に 1) の意味での $g^{-1}(W)$ との関係はどうなるか，という問題が生じる．それについては次の 3) を見よ．
3) X を線型空間，$g\colon X \to V$ を線型同型写像とする．$h = g^{-1}$ と置いて，$h(W)$ を 1) の意味で考えると，これは 2) の意味での $g^{-1}(W)$ と等しいことを示せ．つまり，たまたま g^{-1} が存在するならば 1) の意味で $g^{-1}(W)$ を考えても 2) の意味で $g^{-1}(W)$ を考えてもこれらは一致する．

問 6.14. V, W を線型空間，$f\colon V \to W$ を線型写像とし，f には逆写像 f^{-1} が存在するとする．このとき，f は線型同型写像であることを示せ．
ヒント：f^{-1} が線型であるかが問題である．例えば $w_1, w_2 \in W$ について $f^{-1}(w_1 + w_2)$ と $f^{-1}(w_1) + f^{-1}(w_2)$ を f を用いて比較してみよ．定数倍についても同様である．

（以上）