

以下では特に断らない限り  $K = \mathbb{R}$  もしくは  $K = \mathbb{C}$  とする.

注. 1. 解答の際には「明らか」乃至これに類する文言は原則として用いないこと.

2. よく分からなくなってしまうたら, まずは  $K$  を  $\mathbb{R}$  と読み替え,  $K^n$  は  $\mathbb{R}^n$  あるいは  $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$  位に考えておき, 改めて一般の場合を考えてみよ.

3. 時々教科書を参照する. 例えば「教科書の定義 1.6.2」は「定義(教)1.6.2」と表す. 最終的には自分で調べられるようになってほしいので, 来週あたりで多分やめる<sup>†1</sup>. また, 教科書に答えがまるまる書いてあることがあるが, それについては参照しない. 自分で探すこと(「丸写し」を發表することは構わない. ただし, 必要と思われる場合<sup>†2</sup>には当然質問される).

問 2.1. 次の行列を(既約行)階段行列に左基本変形で変形せよ. また右基本変形で(既約)列階段行列に変形せよ.

$$\begin{array}{ccc}
 1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 6 & 5 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} & 3) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 6 & -4 & 4 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} & 4) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & -4 \\ 3 & 1 & -5 \\ 6 & -4 & -16 \\ 5 & 1 & -9 \end{pmatrix} \\
 2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 6 & 5 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & -3 & -4 & -5 & -16 & -9 \end{pmatrix} & & 
 \end{array}$$

問 2.2.  $V$  を以下のように定める.  $V \neq \emptyset$  であるならば,  $n, r$  及び  $v_1, \dots, v_r, w \in K^n$  を適当に(適切にという意味である)定め,  $V = \{v \in K^n \mid \exists \lambda_1, \dots, \lambda_r \in K \text{ s.t. } v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r + w\}$  が成り立つようにせよ. ただし,  $r$  は  $v_i$  達に過不足が生じないように定めること. 一方,  $V = \emptyset$  であるならばそのことを示せ.

$$\begin{array}{l}
 1) V = \left\{ v \in K^5 \mid \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \\
 2) V = \left\{ v \in K^5 \mid \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -4 & 5 & 4 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \\
 3) V = \left\{ v \in K^5 \mid \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & -4 & -5 & -16 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix} \right\}. \\
 4) V = \left\{ v \in K^5 \mid \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & -4 & -5 & -16 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}.
 \end{array}$$

<sup>†1</sup>面倒だからなのだろうと思うかも知れないが, それは一部正しい.

<sup>†2</sup>發表者の理解が怪しいと思われる場合はもちろんであるが, 發表者は理解しているようでも大多数の学生には難しいと思われる場合なども該当する.

問 2.3.  $a, b, c \in K$  とし,  $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & b & c \\ b & 0 & c \end{pmatrix}$  と置く.  $\text{rank } A$  を求めよ.

問 2.4.  $A \in M_{m,n}(K)$  とする.  $A = 0$  が成り立つ<sup>†3</sup>ことと,  $\text{rank } A = 0$  が成り立つことは同値であることを示せ.

問 2.5.  $V$  を  $\mathbb{R}$ -線型空間とし,  $f$  を  $\mathbb{R}^3$  から  $V$  への  $\mathbb{R}$ -線型写像とする.

$$x = f \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, y = f \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, z = f \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

とするとき,

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を求めよ.

問 2.6. 以下に挙げる  $\mathbb{R}^2$  あるいは  $\mathbb{R}^3$  の元に関する方程式において, 解が存在しないような  $a, b$  の範囲を平面に図示せよ. ただし,  $a, b \in \mathbb{R}$  とする.

注意: 例えば 1) において,  $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 4 & b \end{pmatrix}$  がたとえ正則 (逆行列を持つ) でなくとも方程式が解を持つ可能性があることに注意せよ. 2) も同様である.

$$1) \begin{pmatrix} a & 1 \\ 4 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 3 & 1 & b \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

問 2.7.  $A \in M_{m,n}(K)$  とし,  $V \subset K^n$ ,  $W \subset K^m$  をそれぞれ

$$V = \{v \in K^n \mid Av = 0\},$$

$$W = \{w \in K^m \mid \exists v \in K^n \text{ s.t. } w = Av\}$$

により定める.

- 1)  $A$  は階段行列であるとし,  $\text{rank } A = r$  とする. ここでは  $r > 0$  とし, 教科書の定理 1.5.4 (28 頁) の記号を用いる. 特に, 第  $j_k$  列 ( $k = 1, \dots, r$ ) はそれぞれ  $K^m$  の第  $k$  基本ベクトル  $e_k$  に等しい. このとき,

$$W = \{w \in K^m \mid \exists \lambda_1, \dots, \lambda_r \in K \text{ s.t. } w = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_r e_r\}$$

が成り立つ ( $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_r e_r$  という形の  $K^n$  の元を  $e_1, \dots, e_r$  の線型結合あるいは一次結合と呼ぶ) ことを示せ. また,  $K^n$  の基本ベクトルを  $f_1, \dots, f_n$  とし,  $f_{j_1}, \dots, f_{j_r}$  を除いた  $(n-r)$  個を改めて  $g_1, \dots, g_{n-r}$  とする.  $g_i \in V$  とは限らないので  $g_i$  達をうまく (ある意味で自然に) 「加工」して  $V$  の元  $v_1, \dots, v_{n-r}$  を作ると,

- i)  $\mu_1, \dots, \mu_{n-r} \in K$  について  $\mu_1 v_1 + \dots + \mu_{n-r} v_{n-r} = 0$  が成り立つ<sup>†4</sup>ならば  $\mu_1 = \dots = \mu_{n-r} = 0$  が成り立つ.

<sup>†3</sup>印刷物では  $A = O_{m,n}$  などと表す方が標準的であるが, ここでは板書にあわせた.

<sup>†4</sup>印刷物では零ベクトルは  $o$  などと表す方が標準的であるが, ここでは板書にあわせた. また, 左辺は  $v_1, \dots, v_{n-r}$  の線型結合である.

ii)  $V = \{v \in K^n \mid \exists \mu_1, \dots, \mu_{n-r} \in K \text{ s.t. } v = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_{n-r} v_{n-r}\}$  が成り立つようにできることを示せ.

$V$  の元が全て  $v_1, \dots, v_{n-r}$  の線型結合として表せることも示す必要がある.

- 2) 左基本変形で  $A$  を階段行列に変形する. 基本変形に対応する基本行列の積を  $P$  とすると,  $P$  は正則であって  $PA$  は階段行列である. このとき, 条件  $w = Av$  と  $Pw = PAv$  は同値であることを示せ.
- 3)  $\text{rank } A = r, r > 0$  とすると,  $w_1, \dots, w_r \in K^m$  であって性質
  - i)  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$  について  $\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_r w_r = 0$  が成り立つならば  $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$  が成り立つ.
  - ii)  $W = \{w \in K^m \mid \exists \lambda_1, \dots, \lambda_r \in K \text{ s.t. } w = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_r w_r\}$  が成り立つ. 持つものが存在することを示せ.
- 4)  $\text{rank } A = r, r < n$  とすると,  $v_1, \dots, v_{n-r} \in K^n$  であって性質
  - i)  $\mu_1, \dots, \mu_{n-r} \in K$  について  $\mu_1 v_1 + \dots + \mu_{n-r} v_{n-r} = 0$  が成り立つならば  $\mu_1 = \dots = \mu_{n-r} = 0$  が成り立つ.
  - ii)  $V = \{v \in K^n \mid \exists \mu_1, \dots, \mu_{n-r} \in K \text{ s.t. } v = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_{n-r} v_{n-r}\}$  が成り立つ. 持つものが存在することを示せ.

ヒント: 1) と 2) は 3) と 4) のための誘導である.

注 2.8. 問 2.7 の 1) 3) 4) における条件 i) は  $\{v_i\}_{i=1, \dots, n-r}$  や  $\{w_j\}_{j=1, \dots, r}$  が線型独立 (一次独立) であるということである. 線型独立性について本格的に扱うのは後期からの予定であるが, 極めて基本的な概念なので, 慣れるために前期でも時々扱う. 時間が許せば前期でも本格的に扱う. また, 3) と 4) の条件  $r > 0$  と  $r < n$  は, 適切な解釈の下に不要である.

定義 2.9.  $K[x]$  で  $K$  の元を係数とし,  $x$  を変数とする多項式全体のなす集合を表す. 即ち,  $K[x] = \{K \text{ の元を係数とし, } x \text{ を変数とする多項式全体}\}$  と置く.  $f, g \in K[x], \lambda \in K$  について,  $f + g \in K[x]$  を多項式の和,  $\lambda f \in K[x]$  を多項式の定数倍により定める.  $K[x]$  はこれらの演算に関して  $K$ -線型空間である. 通常は  $K[x]$  には常にこの演算をいれ,  $K$ -線型空間と看做す<sup>†5</sup>.

問 2.10. 1)  $\mathbb{R}[x]$  は  $\mathbb{R}$ -線型空間であることを示せ. また,  $\mathbb{C}[x]$  は  $\mathbb{C}$ -線型空間であることを示せ.

- 2)  $V = \{\text{実数列全体}\}$  と置く.  $a \in V$  であるとき ( $a$  は実数列であるから)  $a = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  と表す. 即ち,  $a$  の第  $n$  項を  $a_n$  で表す<sup>†6</sup>.  $a, b \in V$  であるとき,  $a + b \in V$  を  $(a + b)_n = a_n + b_n$  により定め (即ち,  $a + b$  という名前の数列の第  $n$  項を  $a_n + b_n$  とする),  $\lambda a \in V$  を  $(\lambda a)_n = \lambda a_n$  により定める. これらの演算に関し  $V$  は  $\mathbb{R}$ -線型空間であることを示せ. また,  $\mathbb{R}$  や「実数」を  $\mathbb{C}$  や「複素数」でそれぞれ置き換えても同様のことが成り立つことを示せ.

<sup>†5</sup> $K[x]$  には多項式同士の積により, 積 (という演算) も定義される. 和と定数倍に加え, 積も考えた時には  $K[x]$  を多項式環と呼ぶ.

<sup>†6</sup>ここでは  $0 \in \mathbb{N}$  とするが, この間に関しては  $0 \in \mathbb{N}$  と考えるかどうかは本質的ではない.

$V, W$  を線型空間,  $f: V \rightarrow W$  を写像とする (「 $K$ -」は省略した.  $K$  があまり重要ではないときにはこのように省略する).  $f$  が線型同型写像であることは,  $f$  が二つの条件, 即ち

- 1)  $f$  は逆写像 (定義 (教) 3.4.5) を持つ.
- 2)  $f$  と,  $f$  の逆写像はいずれも線型写像 (定義 (教) 3.5.1) である.

をみたすことであった (定義 1.8, 定義 (教) 3.5.17). まず条件 1) について考える.

定義 2.11 (定義 (教) 1.6.2).  $A, B$  を集合とし,  $f: A \rightarrow B$  を写像とする.

- 1)  $f$  が単射であるとは,  $x, y \in A$  について  $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$  が成り立つことを言う<sup>†7</sup>.
- 2)  $f$  が全射であるとは,  $\forall b \in B, \exists a \in A$  s.t.  $b = f(a)$  が成り立つことを言う.
- 3)  $f$  が全単射であるとは  $f$  が単射かつ全射であることを言う.

問 2.12. 1)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  を  $f(x) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$  により定める.  $f$  は単射であるが全射ではないことを示せ.

- 2)  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  を  $g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x$  により定める.  $g$  は全射であるが単射ではないことを示せ. また,  $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \right\}$  と置き,  $g': V \rightarrow \mathbb{R}$  を  $v \in V$  について  $g'(v) = g(v)$  と置くことによって定めると,  $g'$  は全単射であることを示せ.

このように, 代入する元を元の集合の部分集合 (例えば  $X$  とする) に制限することを写像を  $X$  に制限すると言う. また, このようにして得られた写像を元の写像の  $X$  への制限と呼ぶ. 元の写像が  $f$  であるとき,  $f$  の  $X$  への制限を  $g|_X$  で表す. 今の場合, もともと  $\mathbb{R}^2$  の元について定まっていた写像  $g$  に,  $\mathbb{R}^2$  の部分集合  $V$  の元しか代入しないことにしたものが,  $g$  の  $V$  への制限  $g|_V$  である. 従って  $g' = g|_V$  である.

- 3)  $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  を  $h \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$  により定める.  $h$  は単射でも全射でもないことを示せ.

問 2.13.  $A, B$  を集合とし,  $f: A \rightarrow B$  を写像とする. 以下の二条件は同値であることを示せ.

- i)  $g: B \rightarrow A$  が存在し,  $g \circ f = \text{id}_A, f \circ g = \text{id}_B$  がそれぞれ成り立つ.
- ii)  $f$  は全単射である.

従って,  $A, B$  が  $K$ -線型空間であって,  $f: A \rightarrow B$  が  $K$ -線型同型写像であるならば  $f$  は全単射である (逆は一般には正しくない. そもそも  $f$  が線型写像でないことがある).

次に, 定義 1.8 の条件 2) (線型性) について考える.

問 2.14. 問 2.12 の写像  $f, g, h$  はいずれも  $\mathbb{R}$ -線型写像であることを示せ.

問 2.15. 1)  $V$  を  $K$ -線型空間とする.  $V$  の恒等写像 (何もしない写像)  $\text{id}_V$  を  $V$  から  $V$  への写像と看做すと  $K$ -線型同型写像であることを示せ.

<sup>†7</sup> $x = y$  ならば  $f(x) = f(y)$  が成り立つのは当たり前である. この逆が成り立つことが単射ということである.

- 2)  $V, W, U$  を  $K$ -線型空間,  $f: V \rightarrow W, g: W \rightarrow U$  をそれぞれ  $K$ -線型写像とする.  $h: V \rightarrow U$  を  $v \in V$  について  $h(v) = g(f(v))$  と置くことにより定める ( $h$  を  $f$  と  $g$  の合成とする).  $h$  は  $K$ -線型写像であることを示せ. さらに,  $f, g$  が共に  $K$ -線型同型写像であるとして,  $g \circ f$  も  $K$ -線型同型写像であることを示し, 逆写像を  $f^{-1}, g^{-1}$  を用いて表せ.

問 2.16.  $A \in M_{m,n}(K)$  とする.

- 1)  $f: K^n \rightarrow K^m$  を  $f(v) = Av$  により定めることができることを確かめよ.
- 2) 上のように  $f$  を定めると  $f$  は  $K$ -線型写像であることを示せ.
- 3)  $B \in M_{l,m}(K)$  とし,  $g: K^m \rightarrow K^l$  を  $g(w) = Bw$  により定める.  $h: K^n \rightarrow K^l$  を  $h = g \circ f$  により定める. 即ち  $h(v) = g(f(v))$  と定める. すると  $h(v) = BAv$  が (任意の  $v \in K^n$  について) 成り立つことを示せ.

以下では簡単な応用を考える.

問 2.17.  $A \in M_2(\mathbb{R})$  とする.  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  と表しておいて,  $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$  と置き,  $A$  の行列式と呼ぶ (行列式については後日詳しく扱う).  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  を  $f(v) = Av$  により定める.

- 1)  $\det A \neq 0$  であれば,  $f$  は全単射であることを示せ. また, このとき  $f^{-1}$  を求めよ.
- 2) (1) とは逆に)  $f$  が全単射であるならば  $\det A \neq 0$  が成り立つことを示せ.

以下では

- I) ある  $n$  について  $\mathbb{R}^n$  と  $\mathbb{R}$ -線型同型な  $\mathbb{R}$ -線型空間であって,  $\mathbb{R}^n$  とは異なるもの,
- II) 任意の  $n$  について  $\mathbb{R}^n$  と  $\mathbb{R}$ -線型同型ではない  $\mathbb{R}$ -線型空間,

についてそれぞれ一つずつ考察する.

問 2.18.  $\mathbb{R}^3$  の部分集合  $P$  を

$$P = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \mid \exists t, s \in \mathbb{R} \text{ s.t. } v = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

により定める.

- 1)  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow P$  を

$$f \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

により定める.  $f$  は全単射であることを示せ.

- 1\*) 線型独立 (一次独立) の定義を既に知っているならば, 1) の式で  $f$  を定めたとき,  $f$  が単射であることと,  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  が線型独立であることは同値であることを示してみよ.

- 2)  $f$  を  $\mathbb{R}^2$  から  $\mathbb{R}^3$  への写像と看做すと単射であるが全射ではないことを示せ.

- 3)  $v, w \in P$  とする.  $v, w$  を一旦  $\mathbb{R}^3$  の元と看做して  $v + w \in \mathbb{R}^3$  を計算すると, 実際には  $v + w \in P$  が成り立つことを示せ. また,  $\lambda \in \mathbb{R}$  とすると,  $\lambda v \in \mathbb{R}^3$  を考えることができるが, これについても  $\lambda v \in P$  が成り立つことを示せ.

このように、 $P$ では $\mathbb{R}^3$ と同じ演算を考えることができる。ここで、計算の結果が $P$ から「はみ出さない」ことが重要である。このことを $P$ は $\mathbb{R}^3$ における演算（今の場合はベクトルの和・定数倍）に関して閉じていると言う。また、このような演算を考えることを「 $P$ に $\mathbb{R}^3$ の演算から自然に定まる演算を入れる」などと言う。

- 4) 3)のように $P$ における演算を定めると、 $P$ は $\mathbb{R}$ -線型空間であることを示せ。
- 5)  $f$ は $\mathbb{R}^2$ から $P$ への $\mathbb{R}$ -線型同型写像であることを示せ。また、 $f$ を $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^3$ への写像と看做すと $\mathbb{R}$ -線型同型写像ではないことを示せ。

問 2.19 (問 2.18 も参照のこと). 1)  $V = K^n$  とする。  $V$  の空でない部分集合  $W$  が  $V$  の演算に関して閉じているとき、 $W$  は  $K$ -線型空間であることを示せ。

- 2)  $V$  を  $K$ -線型空間とする。  $V$  の空でない部分集合  $W$  が  $V$  の演算に関して閉じているとき、 $W$  は  $K$ -線型空間であることを示せ。

このように、 $K$ -線型空間  $V$  の空でない部分集合  $W$  が  $V$  の演算に関して閉じているとき、 $W$  を  $V$  の  $K$ -線型部分空間と呼ぶ。線型空間（のみ）を考えていることが明らかとなるときには単に部分空間などとも呼ぶ。

問 2.20. 1)  $K[x] = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N}, \exists a_0, \dots, a_n \in K \text{ s.t. } f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n\}$  が成り立つことを示せ。  $f \in K[x], f \neq 0$  (右辺は多項式としての 0 である) のとき、 $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, a_n \neq 0$  と表して  $n$  を  $f$  の次数と呼ぶ。また、 $a_n$  を  $f$  の最高次の係数と呼ぶ。  $f = 0$  であるときには  $f$  の次数は通常は定めない<sup>†8</sup>。

- 2)  $K[x]$  は  $K$ -線型空間であることを確かめよ。また、 $f \in K[x]$  のとき、公理 (定義 1.1) の 4) により与えられる  $-f$  は多項式としての  $-f$  に等しいことと、公理 (定義 1.1) の 3) により与えられる  $o$  は多項式としての 0 に等しいことを示せ。

後半に関しては、等しいことが示されるまでは例えば公理 (定義 1.1) の 4) により与えられる  $-f$  を仮に  $g$  (記号は好きなものを使えばよい) と置いて議論するのがよい。

定義 2.21 (定義 (教) 1.5.5).  $\mathbb{R}^n$  の元で、第  $i$  成分だけが 1 であって、その他の成分は全て 0 であるようなものを、第  $i$  基本ベクトルと呼ぶ<sup>†9</sup>。第  $i$  基本ベクトル、 $1 \leq i \leq n$  を総称して ( $K^n$  の) 基本ベクトルと呼ぶ。

問 2.22.  $\varphi: K^n \rightarrow K[x]$  を  $K$ -線型写像とする。  $e_i \in K^n$  を第  $i$  基本ベクトルとし、 $f_1, \dots, f_n \in K[x]$  を  $f_i = \varphi(e_i)$  により定める。

- 1)  $f \in K[x]$  とする。ある  $v \in K^n$  について  $f = \varphi(v)$  が成り立つことと、ある  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$  が存在して  $f = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$  が成り立つことは同値であることを示せ。

ヒント：まず  $v$  を基本ベクトルを用いて分解してみよ。

- 2)  $V = \{f \in K[x] \mid \exists v \in K^n \text{ s.t. } f = \varphi(v)\}$  と置く。  $V \neq K[x]$  であることを示せ。

(以上)

<sup>†8</sup>便宜的に仮の定義をすることもあるが、その時には明示する。

<sup>†9</sup>基本ベクトルという用語は「常識」とは言いきれないので一言断ってから用いた方が無難である。