２０１２年度数学 IA 演習（理 I 35–39 組）　第１２回　'13/1/29（火）４限

訂正: '13/1/11 問 12.1 の 2) と問 12.8 の 3) c) を修正.
'13/1/29 問 12.1 の 2) を再修正．また，問 12.5 を修正

問 12.1. 次の常微分方程式のそれぞれについて以下の問に答えよ．

1) それぞれの微分方程式を実一変数の，実数値函数についての常微分方程式と考え形式的級数解を求め，得られた解の収束半径を求めよ．ただし，変数は x とし，級数の中心は 0 とする．
2) それぞれの常微分方程式の C^∞ 級の解を（級数解法で求まるものに限らず）全て求め，級数解と比較せよ．
3) それぞれの常微分方程式を，複素一変数の複素数値函数に関する方程式と考えて級数解を求めよ．ただし，変数は x とし，級数の中心は 0 とする．

a) $\dfrac{d^3 f}{dx^3} + \dfrac{d^2 f}{dx^2} - \dfrac{df}{dx} - f = 0$, $f(0) = 0$, $\dfrac{df}{dx}(0) = 0$, $\dfrac{d^2 f}{dx^2}(0) = 1$.

b) $\dfrac{df}{dx} = 1 + f^2$, $f(0) = 0$.

c) $\dfrac{df}{dx} = 3f^{\frac{2}{3}}$, $f(0) = 0$.

d) $f\dfrac{df}{dx} = -1$, $f(0) = 1$.

e) $f\dfrac{df}{dx} = -1$, $f(0) = 0$.

問 12.2 (問 1.3 や 1.4 も参照のこと)**.**　1) $\alpha \in \mathbb{R}$ とする．実変数 x についての実数値函数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に関する（常）微分方程式 $Df = \dfrac{df}{dx} = \alpha f$ の，$x = 0$ を中心とする級数解を全て求め，それぞれについてその収束半径を求めよ．また，級数解が一意的に定まるためには $f(0), Df(0), D^2 f(0), \ldots$ のうちいくつを指定すれば良いか調べよ．

2) 1) について，変数と値を共に複素数とした場合どうであるか調べよ．

3) $M_2(\mathbb{R})$ で実数を成分とする 2×2 行列（2 行 2 列の行列）全体の成す線型空間を表す．$A\in M_2(\mathbb{R})$，$v\in\mathbb{R}^2$ とし，実変数 $\mathbb{R}^2$-値函数 $f=\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ に関する（常）微分方程式

$$Df = Af, \quad f(0) = v \tag{12.3}$$

を考える．

a) P を正則な $M_2(\mathbb{R})$ の元とする（$P\in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ とする）．f が方程式 (12.3) の解であるとき，函数 g を $g(x)=Pf(x)$ により定めると，g は

$$Dg = (PAP^{-1})g, \quad g(0) = Av \tag{12.3'}$$

の解であることを示せ．また，逆に，g が方程式 (12.3') の解であるとき，f を $f(x)=P^{-1}g(x)$ により定めると f は方程式 (12.3) の解であることを示せ．

b) $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$v=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする．方程式 (12.3) の解を求めよ（実数値函数に関する方程式（二つ）に帰着するのが容易であろう）．

c) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$v=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする．方程式 (12.3) の解を求めよ（うまく P を選んで方程式 (12.3') を考えるのが容易である）．

d) $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$v=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする．方程式 (12.3) の解を求めよ（うまく P を選んで方程式 (12.3') を考えるのが容易であるが，素直に解くと実数の範囲では全てを処理しきることが困難である．今は無理に解決しなくてよい．一つの回避策は次の問 12.4 で扱うが他にもある．それらについては数理科学 II で（明示的にかどうかはともかく）扱う）．

問 12.4 (問 1.4 も参照のこと)**.** 記号などは問 12.2 のものをそのまま用いる．問 12.2 の 1) や b) を踏まえて次のような「級数」解法を考えてみる（中心は $x=0$ とする）．

1) A が対角行列であるとする．このとき，方程式 (12.3) の解は $f(x)=v+(Ax)v+\frac{1}{2!}(Ax)^2v+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}(Ax)^nv$ で与えられることを示せ（右辺が収束していることも示すこと．ただし，行列やベクトルに値を取る級数（冪級数）について，各成分

を級数と看做すと収束しているとき，収束すると定める）．ここで，A や x によらず $(Ax)^0 = I_2$（2 次の単位行列）と定める．

2) 1) を踏まえて，A が一般の場合にも $B(x) = I_2 + Ax + \dfrac{1}{2!}(Ax)^2 + \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(Ax)^n$ と定める．すると $B(x)$ は行列値の冪級数として収束していることを示せ．また，収束半径は $+\infty$ であることを示せ．ただし，行列値の冪級数の収束半径は，各成分の収束半径の最小値とする．この $B(x)$ を通常は $\exp Ax$ や $\exp(Ax)$ で表す（$Ax = xA$ なので $\exp xA$ と表すこともある）．

※ ヒント：問 4.2 を用いると実数値の場合に帰着できる．

3) $\dfrac{d \exp Ax}{dx}(x) = A \exp Ax = (\exp Ax)A$ が成り立つことを示せ．

4) $f(x) = (\exp Ax)v$ とすると，f は方程式 (12.3) の解であることを示せ．

5) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ のそれぞれの場合について $\exp Ax$ を求めよ．

6) $\exp(PAP^{-1}x) = P(\exp Ax)P^{-1}$ が成り立つことを示せ．

問 12.5. $h\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級の函数とする．すると，$\displaystyle\int_0^1 Dh(t)dt = h(1) - h(0)$ が成り立つ．このことを踏まえて，以下の問に答えよ．$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級の函数とする．

1)
$$\int_{[0,1]\times[0,1]} D_1 D_2 f(x,y)dxdy = \int_{[0,1]\times[0,1]} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)dxdy$$
を f の微分を含まない形で表せ．

2) 次の積分を f の微分を含まない形で表せ．また，1) の結果と比較せよ．
   a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(1,t)dt + \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(0,1-t)dt$
   b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t,0)dt + \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(1-t,1)dt$

問 12.6. $D_1 = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} \mid z \leq 0\}$，$D_2 = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} \mid z \geq 0\}$ と置く．$n \in \mathbb{Z}$ とし，$f_n\colon D_1 \to \mathbb{C}$ と $g_n\colon D_2 \to \mathbb{C}$ をそれぞれ $f_n(1) = 2\pi\sqrt{-1}n$ と $g_n(-1) = 2\pi\sqrt{-1}\left(n + \dfrac{1}{2}\right)$ をみたす対数函数の枝とする．即ち，$f_n\colon D_1 \to \mathbb{C}$ は $e^{f_n(z)} = z$ かつ $f_n(1) = 2\pi\sqrt{-1}n$ を

みたす唯一の函数，$g_n\colon D_2 \to \mathbb{C}$ は $e^{g_n(z)} = z$ かつ $g_n(-1) = 2\pi\sqrt{-1}\left(n + \dfrac{1}{2}\right)$ をみたす唯一の函数とする．

1) $z_0 \in D_1$ とする．f_n の z_0 を中心としたテーラー展開（テーラー級数）を求め，その収束半径を求めよ．また，$w_0 \in D_2$ とするとき，g_n の w_0 を中心としたテーラー展開（テーラー級数）を求め，その収束半径を求めよ．

2) $D_1 \cap D_2$ は自然に二つの部分に分かれるのでそれぞれを H_1, H_2 とする．即ち，$H_1 = \{z \in D_1 \cap D_2 \,|\, \operatorname{Im} z > 0\}$，$H_2 = \{z \in D_1 \cap D_2 \,|\, \operatorname{Im} z < 0\}$ とする．H_1 上で $f_n = g_m$ が成り立つための n, m に関する条件を求めよ．また，H_2 上で $f_n = g_m$ が成り立つための n, m に関する条件を求めよ．

3) D を次のような,（かなり太い）螺旋状の領域とする．即ち，まず

$$E = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \text{ある } r \geq 0 \text{ が存在して } z = re^{\pi\sqrt{-1}r}\}$$

と置き，

$$D = \mathbb{C} \setminus E$$

と置く．

a) D を図示せよ（まず E を考えるのが簡単である）．

b) D 上で（D 全体で）で定まった函数 $f\colon D \to \mathbb{C}$ であって，$e^{f(z)} = z$ かつ $f(1) = 0$ をみたすものがただ一つ存在することを示せ（つまり，D 上で定まった対数函数の枝で，1 に対して 0 を与えるものがただ一つ存在することを示せ）．

c) f は D 上（複素）解析的であることを示せ．

d) f を D 全体で単一の冪級数として表すことはできないことを示せ．

問 12.7. $V = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ は連続}\}$ と置く．また，$W = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ は } C^\infty \text{ 級}\}$，$U = \{f \in V \,|\, \exists M > 0 \text{ s.t. } |x| \geq M \Rightarrow f(x) = 0\}$ と置く．

1) 函数同士の和，定数倍により V は（実）線型空間であることを示せ．

2) W は V の部分線型空間であることを示せ．

3) U は V の部分線型空間であることを示せ．

4) $f, g \in U$ について $\langle f|g\rangle = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)dx$ と置く.

a) 右辺は広義積分に見えるが，実際には普通の積分であることを示せ.

b) $\langle \cdot | \cdot \rangle$ は U の内積（計量）を定めることを示せ.

5) $n \in \mathbb{N}$ について $f_n \in U$ とする（$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を U の点列とする）．$\{f_n\}$ が $n \to +\infty$ の時ある函数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に広義一様に収束するとする（つまり，$I \subset \mathbb{R}$ がコンパクト集合であれば $\{f_n\}$ は $n \to +\infty$ の時 I 上一様に f に収束するとする）．このとき，$f \in V$ であることと，必ずしも $f \in U$ とは限らないことを示せ.

6) $\langle \cdot | \cdot \rangle$ により定まる U 上のノルムを $\|\cdot\|$ で表す．即ち，$f \in U$ について $\|f\| = \sqrt{\langle f|f\rangle}$ と置く．また，$f \in U$ について $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ と置く.

a) $\|f\|_\infty$ は有限の値であることを示せ．また，$\|\cdot\|_\infty$ は U 上のノルムであることを示せ.

b) U の点列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ であって，$\lim_{n\to+\infty} \|f_n\| = 0$ かつ $\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_\infty = +\infty$ であるようなものを一つ挙げよ[†1].

c) U の点列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ であって，$\lim_{n\to+\infty} \|f_n\| = +\infty$ かつ $\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_\infty = 0$ であるようなものを一つ挙げよ.

6) の b) と c) は，$\mathbb{R}^n$ の場合とは異なり，U 上には同値でないノルムが存在することを示している（第 3 回演習も参照のこと）.

問 12.8. $V = \{f\colon [0,1] \to \mathbb{R} \mid f$ は C^1 級$\}$ とする．$f, g \in V$ について $\langle f|g\rangle = \displaystyle\int_0^1 (f(x)g(x) + Df(x)Dg(x))dx$ と置く[†2].

1) $\langle\cdot|\cdot\rangle$ は V の内積（計量）であることを示せ.

2) $\langle\cdot|\cdot\rangle$ から定まる V のノルムを $\|\cdot\|$ で表す. V の点列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ について,「$\lim_{n\to+\infty} \|f_n\| = 0$ が成り立つ」という主張は，具体的には $\{f_n\}$ について何が成り立つことを主張しているのか簡潔に述べよ.

[†1]「『何か』が 0 に収束するとき『(別の）何か』が 0 に収束する」というのは連続の定義とよく似ていることに注意．c) についても同様である.

[†2] $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ は Sobolev（Соболев ；ソボレフ）空間と関連が深い.

3) $W = \{f\colon [0,1] \to \mathbb{R} \mid f$ は連続$\}$ とする．また，$f \in W$ について $\|f\|_W = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2\,dx}$ と定める．そして $\varphi\colon V \to W$ を $\varphi(f) = Df$ により定める．

a) φ は線型写像であることを示せ．

b) V の点列 $\{f_n\}$ が $\lim_{n\to+\infty} \|f_n\| = 0$ をみたすならば $\lim_{n\to+\infty} \|Df_n\|_W = 0$ が成り立つことを示せ（定義がおどろおどろしいだけで問題としては簡単である）．

c) $f \in V$ について $\|f\|' = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2\,dx}$ と定める（$\|f\|_W$ と式は同じ）．V の点列 $\{f_n\}$ で，$\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|' = 0$ をみたすが $\lim_{n\to+\infty} \|Df_n\|_W = +\infty$ をみたす例を一つ挙げよ．

積分は「足し算」であることを踏まえると問 10.4 や 12.7 で考えた内積は $\mathbb{R}^n$ の標準的な内積の類似と考えることができる．つまり，$\mathbb{R}^n$ の標準的な内積は「成分の積を取ってから和を取る」ことにより得られる．例えば問 12.7 の U の元 f, g について，$f(x)$ や $g(x)$（$x \in \mathbb{R}$）を x-成分と考えてみる．これらについて積を取って和を取ると $\sum_{x\in\mathbb{R}} f(x)g(x)$ となるが，このままでは（無限個の値の足し算なので）意味がよくわからない．そこで積分を取ることにすると問 10.4 や 12.7 で考えた内積が得られる．これらの線型空間や内積（に加え，第 3 回で扱った p-ノルムなど）は例えばフーリエ展開や，超函数などを扱う際に用いられる[†3]．

（本編は以上）

[†3] 時間の関係もあるので表立っては扱われないかもしれない．無限次元の線型空間で内積を持つもの（で，まともなもの）は Hilbert 空間と呼ばれる（一方，内積を持つとは限らないが，ノルムを持つ空間は Banach 空間と呼ばれる）．例えば量子力学には不可欠であるし，微分方程式を（理論的に，あるいは実際的に）調べるのにも不可欠である．数学，特に解析を用いるのであれば，何らかの形で不可避である．

ここから先はとりあえず「読み物」と思っていればよい．内容は数理科学 III や I（一部は数理科学 II）で扱う事柄のうち，技術的には数学 I で扱ったことで足りることである[†4]．さっぱりわからなければ当座忘れてしまってよい．今はこれらの事柄よりも，数学 I で扱った他の事項を先に修得すべきである．なお，以下に現れる「図形の向き」は慣れるまでは難しく感じられることが多いので，とりあえず定義を鵜呑みにして問題を先に解いてしまってから解説を読んでみるのも良いかもしれない．

多変数函数の積分は一変数函数のそれと比べて幾何学的（図形的）な側面が強くなる．ここでは簡単に二変数の場合（$\mathbb{R}^2$ 上の函数）について考えてみる．以下では原則として $\mathbb{R}^2$ の座標（変数）を (x, y)，$\mathbb{R}$ の座標（変数）を t あるいは s とする．

定義 12.9. 1) $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級の函数とする．$\mathbb{R}^2$ 上で形式的に $fdx + gdy$ の形をした「もの」を考え，$\mathbb{R}^2$ 上の **1-形式**と呼ぶ．同様に，$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が C^∞ 級の函数であるとき，hdt の形をしたものを $\mathbb{R}$ 上の 1-形式と呼ぶ[†5]．

2) $\mathbb{R}^n$ 上の **0-形式**とは，$\mathbb{R}^n$ 上の C^∞ 級の函数のこととする（函数に別名をつけたと思えばよい）．

3) $\mathbb{R}^n$ 上の 0-形式や 1-形式を**微分形式**と総称する．

一般に $\mathbb{R}^n$（$n > 2$）上の 1-形式や p 形式（$p \in \mathbb{N}$, $p > 1$）も定まり，微分形式と総称されるが，ここでは扱わない（$\mathbb{R}^2$ 上の 2-形式は後で扱う（定義 12.21））．以下では積分に着目するが，1-形式は全微分方程式（常微分方程式の一種）を考えると自然に現れる[†6]．関連してベクトル場も大切な概念である．これから $\mathbb{R}^2$ 上の 1-形式の，曲線に沿った積分を考えたいが，手始めに $\mathbb{R}$ 上の 1-形式の曲線に沿った積分から考える．

定義 12.10. $a < b$ とし，I を閉区間 $[a, b]$ に正の向き（「右向き」）を入れたものとする．このとき I 上での ω の**積分**を

$$\int_I \omega = \int_a^b h(t)dt$$

により定める．

定義 12.11. $\gamma\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ が**区分的に C^∞ 級の曲線**であるとは，有限個の $s_0, \ldots, s_k$，$0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_k = 1$ と，C^∞ 級の函数（写像）$\gamma_i\colon [s_i, s_{i+1}] \to \mathbb{R}^2$ が存在して，$t \in [s_i, s_{i+1}]$ であれば $\gamma(s) = \gamma_i(s)$ が成り立つことを言う[†7]．$\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$ であるとき，γ は ***a* と *b* を結ぶ**と言う．

定義 12.12. $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級の函数とし，$\omega = hdt$ を $\mathbb{R}$ 上の 1 形式とする．また，$a, b \in \mathbb{R}$ とする．$\gamma\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ を a と b を結ぶ，区分的に C^∞ 級の曲線とする．このとき γ に沿った ω の**積分**を

$$\int_\gamma \omega = \int_0^1 h \circ \gamma(s) \frac{d\gamma}{ds} ds$$

により定める．

問 12.13. 定義 12.12 において $\displaystyle\int_\gamma \omega$ は γ の選び方に依らずに定まることを示せ．
ヒント：積分の変数変換公式を考えてみよ（なお，実質的には既に何回か出題している）．

[†4]非常に簡易な「予告編」位に考えて欲しい．数理科学 I・II・III で扱う事柄は技術的に言えば数学 I・数学 II の内容でほぼまかなえる（数理科学 II ではいつの間にか「Jordan 標準形」を知っていることになっていたりするので注意を要する）．勿論（これらの技術・内容を用いて）新しい概念を多く導入するので，それらに習熟する必要はある．

[†5]より丁寧に**微分 1-形式**と呼ぶこともある．1-形式は本来は $T_p\mathbb{R}^n$（$p \in \mathbb{R}^n$）から $\mathbb{R}$ への線型写像（の族）として定義される．ここではあまり気にしなくて良いが，簡単に定義 12.32 に述べた．

[†6]扱うとすれば数理科学 II であるが，時間の関係で講義で実際に扱われることは少ないようである．

[†7]各 γ_i は C^∞ 級の曲線である．$n = 1$ だとあまり曲線には見えないが，曲線と考える．ちなみに，曲線が微分可能であることと，単に連続であることには極端な差がある．例えば $n \geq 2$ とすると平面（や空間）を埋め尽くすような「連続な曲線」を定めることができる．一方，このような「微分可能な曲線」は存在しない．興味を持ったならば「Peano curve」等について調べてみよ．

定義 12.12 において，特に $\gamma(s) = a + s(b-a)$ である場合を考える．すると $\displaystyle\int_\gamma \omega = \int_0^1 h(a+s(b-a))(b-a)ds = \int_a^b h(t)dt$ が成り立つ．ここで γ が表す図形を考えてみる．$a \leq b$ ならば，それは閉区間 $[a, b]$ に正の向き（「右向き」）をつけたものであるし，$b \leq a$ であるならば，それは閉区間 $[b, a]$ に負の向き（「左向き」）をつけたものである．ここで話を逆にして，あらかじめ向きが指定された閉区間 $[a, b]$ を考えることにする．正の向きが与えられているものを I，負の向きが与えられているものを J とする（集合としては $I = J$ であるが，向きを込めて考えているので $I \neq J$ である）．すると，I については $\gamma(s) = a + s(b-a)$ である．一方，J については a と b の役割が逆になっているので $\gamma(s) = b + s(a-b)$ としたことになる．I 上での積分を考える際には $t = \gamma(s)$ は a から b に向かうと考えるのが自然であるし，J 上での積分を考えるのであれば $t = \gamma(s)$ は b から a に向かうと考えるのが自然である．つまり

$$I \text{ 上での } h \text{ の積分} = \int_a^b h(t)dt,$$
$$J \text{ 上での } h \text{ の積分} = \int_b^a h(t)dt,$$

と考える．前者については，定義 12.10 の記号を用いれば $\displaystyle\int_I \omega = \int_\gamma \omega$ が成り立つ．後者については，$\gamma(s) = b + s(a-b)$ であるから，$\displaystyle\int_\gamma \omega = \int_b^a h(t)dt$ が成り立つ．一方，$\displaystyle\int_b^a h(t)dt = -\int_a^b h(t)dt = \int_I \omega$ であるから，γ を J にあわせて選んだ場合には $\displaystyle\int_\gamma \omega = -\int_I \omega$ が成り立つ．このことを踏まえて，しばしば $J = -I$ と表す．図形の向きと微分形式の積分の関係については後でもう一度述べる（注 12.26）．

定義 12.14. 1) $\omega = f dx + g dy$ を $\mathbb{R}^2$ 上の 1-形式とする．$\gamma\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ を区分的に C^∞ 級であるような曲線とするとき，γ に沿った ω の**積分** $\displaystyle\int_\gamma \omega$ を，$\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s))$ と成分を用いて表しておいて

$$\int_\gamma \omega = \int_0^1 \left(f \circ \gamma(s) \frac{d\gamma_1}{ds}(s) + g \circ \gamma(s) \frac{d\gamma_2}{ds}(s) \right) ds \tag{12.15}$$

により定める．

定義 12.16. f を $\mathbb{R}$ 上の 0-形式とする．つまり，$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級の函数とする．このとき，$\mathbb{R}$ 上の 1-形式 df を

$$df = \frac{df}{ds} ds$$

により定め，f の**外微分**と呼ぶ（外微分は後で $\mathbb{R}^2$ 上の 1-形式についても定める（定義 12.22）．ここでは扱わないが，$\mathbb{R}^n$ 上の p-形式について外微分が $\mathbb{R}^n$ 上の $(p+1)$-形式として定まる）．また，$\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が C^∞ 級の曲線であるとき，$\mathbb{R}$ 上の 1-形式 $\gamma^* dx, \gamma^* dy$ を，x, y に γ を「代入」して $\gamma^* dx = d\gamma_1$，$\gamma^* dy = d\gamma_2$ により定める（γ_1, γ_2 はそれぞれ $\mathbb{R}$ 上の函数と看做せることに注意）．γ が区分的に C^∞ 級であるときには，γ が C^∞ 級である各部分 $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ に分けて $(\gamma_i)^* dx$ などを考える．

γ が区分的に C^∞ 級であるときには,「曲線が折れている点」が気にはなるが，ここではおおらかに C^∞ 級の曲線であるかのように考えてしまって良い．

問 12.17. 形式的に上の定義をなぞり，$\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が C^∞ 級であるときに

$$\gamma^* dx = d\gamma_1 = \frac{d\gamma_1}{ds} ds, \quad \gamma^* dy = d\gamma_2 = \frac{d\gamma_2}{ds} ds$$

がそれぞれ成り立つことを確かめよ．

定義 12.18. $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を C^∞ 級の曲線とする．函数 $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ についても，$\gamma^* g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を g に γ を「代入」することにより定める．すなわち，$\gamma^* g(s) = g \circ \gamma(s)$ と定める．$\omega = f dx + g dy$ が $\mathbb{R}^2$ 上の 1-形式であるとき，$\mathbb{R}$ 上の 1-形式 $\gamma^*\omega$ を

$$\gamma^*\omega = (\gamma^* f)\gamma^* dx + (\gamma^* g)\gamma^* dy$$

により定め，γ による ω の**引き戻し**と呼ぶ．γ が区分的に C^∞ 級であるときには，定義 12.16 と同様に C^∞ 級である各部分に分けて考える（が，ここではあまり気にしなくて良い）．

問 12.19. $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を C^∞ 級の曲線とする．$\omega = f dx + g dy$ とすると $\gamma^*\omega = f \circ \gamma \dfrac{d\gamma_1}{ds} ds + g \circ \gamma \dfrac{d\gamma_2}{ds} ds$ が成り立つことを示せ．

I を $[0,1]$ に正の向きを与えたものとする．すると，式 (12.15) は

$$\int_\gamma \omega = \int_I \gamma^*\omega$$

と書き直すことができる．

問 12.20. $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ を

$$\gamma(s) = \begin{cases} (4s, 1), & 0 \le t \le \dfrac{1}{4}, \\ (1, 4s-1), & \dfrac{1}{4} \le s \le \dfrac{1}{2}, \\ (3-4s, 1), & \dfrac{1}{2} \le s \le \dfrac{3}{4}, \\ (0, 4-4s), & \dfrac{3}{4} \le s \le 1 \end{cases}$$

により定める．γ は区分的に C^∞ 級の曲線である．

1) γ を図示せよ．

2) $\mathbb{R}^2$ 上の 1-形式 ω を $\omega = \dfrac{\partial f}{\partial y} dy$ により定める．$\displaystyle\int_\gamma \omega$ を求めよ．

3) $\mathbb{R}^2$ 上の 1-形式 ω を $\omega = \dfrac{\partial f}{\partial x} dx$ により定める．$\displaystyle\int_\gamma \omega$ を求めよ．

定義 12.21. 1) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級の函数とする．$f dx \wedge dy$ の形をしたものを $\mathbb{R}^2$ 上の **2-形式**と呼ぶ[†8]．

2) $\omega_1 = f_1 dx + g_1 dy$，$\omega_2 = f_2 dx + g_2 dy$ をそれぞれ $\mathbb{R}^2$ 上の 1-形式とする．ω_1 と ω_2 の**外積**（ウェッジ積）$\omega_1 \wedge \omega_2$ を

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = (f_1 g_2 - f_2 g_1) dx \wedge dy$$

により定める（$dx \wedge dy$ の「係数」が $\det \begin{pmatrix} f_1 & g_1 \\ f_2 & g_2 \end{pmatrix}$ に等しいことに注意）．

$dx \wedge dx = dy \wedge dy = 0$，$dy \wedge dx = -dx \wedge dy$ と定める．すると，多項式に似（ていはいるが，異なっ）た計算規則

$$(\omega_1 + \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge \omega_3 + \omega_2 \wedge \omega_3,$$
$$\omega_1 \wedge \omega_2 = -\omega_2 \wedge \omega_1,$$
$$(f\omega_1) \wedge \omega_2 = f(\omega_1 \wedge \omega_2)$$

[†8] dx や dy と同様に，$dx \wedge dy$ も本来は線型写像の族として定義される．

等が成り立つ（最後の式では ω_1 や $\omega_1 \wedge \omega_2$ の函数倍を考えている[†9]．これらは安直に「係数」に f をかけると考えればよい）．

定義 12.22. $\omega = fdx + gdy$ を $\mathbb{R}^2$ 上の 1-形式とする．このとき，ω の**外微分** $d\omega$ を

$$d\omega = df \wedge dx + dg \wedge dx$$

により定める．

注 12.23. 定義 12.21 や 12.22 は誤りではない範囲で簡略化してある．きちんとした定義をするには少し用意が必要なのでベクトル解析の教科書[†10]などを参照のこと．

問 12.24. $\omega = fdx + gdy$ を $\mathbb{R}^2$ 上の 1-形式とすると，$d\omega = \left(-\dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial g}{\partial x}\right) dx \wedge dy$ が成り立つことを示せ．

「定義」 12.25 (この「定義」は本質的に不完全である．注 12.26 を参照のこと)**.**
$\omega = fdx \wedge dy$ を $\mathbb{R}^2$ 上の 2-形式とする．$P = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ について，ω の P 上の**積分** $\displaystyle\int_P \omega$ を

$$\int_P \omega = \int_P f dxdy$$

により定める．

注 12.26. 正確には「定義」12.25 の積分は P のみでは定まらない（1-形式の積分も図形（区間）だけだは定まらず，向きを定める必要があった）．実際，x と y の役割を入れ替えてリーマン積分の定義に戻れば

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y)dxdy = \int_{[c,d]\times[a,b]} f(x, y)dydx$$

が成り立つことがわかる．これにあわせて「定義」12.25 を書き換えてみる．すると，ω を $\omega = gdy \wedge dx$ と表しておいて

$$\int_P \omega = \int_P gdydx \tag{12.27}$$

と定めることになる．しかし，これは x と y を入れ替える前の（元の）定義とは一致しない．実際，$dy \wedge dx = -dx \wedge dy$ であるから，$gdy \wedge dx = -gdx \wedge dy$ が成り立つ．これは ω に等しいが，一方 ω は $fdx \wedge dy$ と等しいのだから $g = -f$ が成り立つ．従って

$$\int_P \omega = \int_P -fdydx = \int_P -fdxdy$$

が成り立つはずであるが，もしこれが「定義」12.25 の定義と一致するのであれば常に $\displaystyle\int_P \omega = 0$ が成り立つ．これはいかにもおかしい．実際には「定義」12.25 の積分は「$[a, b] \times [c, d]$ に正の向きを入れたものを P としたとき」の P 上の積分である（このようにすればきちんとした定義である）．一方，式 (12.27) で定めた積分は,「$[a, b] \times [c, d]$ に負の向きを入れたものを P としたとき」の P 上の積分であって，$[a, b] \times [c, d]$ に正の向きを入れたものを P としたときの P 上の積分とは丁度符号が異なる．

定義 12.28. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を C^∞ 級の写像とする．$\omega = gdx \wedge dy$ を $\mathbb{R}^2$ 上の 2-形式とするとき，ω の f による**引き戻し** $f^*\omega$ を，$p \in \mathbb{R}^2$ について $f(p) = (f_1(p), f_2(p))$ と成分を用いて表しておいて

$$f^*\omega = (g \circ f)df_1 \wedge df_2$$

により定める（$f^*\omega$ は ω に $(x, y) = (f_1(p), f_2(p))$ を「代入」して得られる）．

問 12.29. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を C^∞ 級の写像とし，$\omega = dx \wedge dy$ とする．$x \in \mathbb{R}^2$ について $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ と成分を用いて表すと $f^*\omega = (\det Df)dx \wedge dy$ が成り立つことを示せ．

[†9]函数は 0-形式であるから，0-形式と 1-形式や 2-形式との積を考えているとも言える．実際，p-形式と q-形式の積が $(p + q)$-形式として定まり，函数倍と 0-形式との外積は一致する．

[†10]例えば スピヴァック 多変数の解析学，スピヴァック著，齋藤正彦訳（東京図書）．

問 12.30. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を C^∞ 級の微分同相写像とする．つまり，f は C^∞ 級であって，また，ある C^∞ 級の写像 $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が存在して $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$，$f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ がそれぞれ成り立つとする．

1) $x \in \mathbb{R}^2$ について，$\det Df(x) \neq 0$ が成り立つことを示せ．また，$\forall x \in \mathbb{R}^2$, $\det Df(x) > 0$ あるいは $\forall x \in \mathbb{R}^2$, $\det Df(x) < 0$ のいずれか一方のみが必ず成り立つことを示せ．
2) $\forall x \in \mathbb{R}^2$, $\det Df(x) > 0$ のとき，f は $\mathbb{R}^2$ の**向きを保つ**という．f が $\mathbb{R}^2$ の向きを保ち，$f([0,1] \times [0,1]) = [0,1] \times [0,1]$ をみたすとき，$\mathbb{R}^2$ 上の 2-形式 ω について，$\displaystyle\int_{[0,1]\times[0,1]} f^*\omega = \int_{[0,1]\times[0,1]} \omega$ が成り立つことを示せ．
3) $\forall x \in \mathbb{R}^2$, $\det Df(x) < 0$ のとき，f は $\mathbb{R}^2$ の**向きを逆にする（保たない）**という[†11]．f が $\mathbb{R}^2$ の向きを逆にし，$f([0,1]\times[0,1]) = [0,1]\times[0,1]$ をみたすとき，$\mathbb{R}^2$ 上の 2-形式 ω について，$\displaystyle\int_{[0,1]\times[0,1]} f^*\omega = -\int_{[0,1]\times[0,1]} \omega$ が成り立つことを示せ．

問 12.31. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級の函数とする．P を $[0,1] \times [0,1]$ に正の向きを入れたものとし，$\mathbb{R}^2$ 上の 1-形式 ω_1, ω_2 をそれぞれ

$$\omega_1 = \frac{\partial f}{\partial y} dy, \quad \omega_2 = \frac{\partial f}{\partial x} dx$$

により定める．また，γ を問 12.20 のように定める．問 12.5 を踏まえ，

$$\int_P d\omega_1 = \int_\gamma \omega_1, \quad \int_P d\omega_2 = \int_\gamma \omega_2$$

がそれぞれ成り立つことを示せ．

問 12.20 は，γ で表される図形は P の境界に（何らかの方法で）向きを定めたものであることを意味する．そこで $\gamma = \partial P$ と表してみると，問 12.31 の結果は $\displaystyle\int_P d\omega = \int_{\partial P} \omega$（ただし $\omega = \omega_1$ あるいは $\omega = \omega_2$）が成り立つことを意味する．適切な定義の下で，これが一般の状況でも成り立つことを主張するのがグリーンの定理や，ガウスの定理，ストークスの定理である[†12]．

定義 12.32 ($\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場と 1-形式についてのおまけ)**.**

1) $p = (u, v) \in \mathbb{R}^2$ とする．p におけるベクトル（微分可能な曲線の接ベクトル（速度ベクトル）を念頭に置けばよい）全体の成す集合を $T_p\mathbb{R}^2$ で表す．ベクトルは p が何であっても p が原点であると考えて和や定数倍を定め，$T_p\mathbb{R}^2$ を線型空間と看做す（本当に p を始点とすると，例えば二つのベクトルの和を取ると始点が $2p = (2u, 2v)$ になってしまうので，そうは考えない．$\mathbb{R}^2$ のコピーが各 p に張り付いていると考えるのが一番自然である）．$T_p\mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の p における**接空間**（**tangent space**）（接平面（tangent plane））と呼ぶ．
2) (x, y) を $\mathbb{R}^2$ の標準的な（通常の）座標とする．また，$p \in \mathbb{R}^2$ とする．線型空間 $\mathbb{R}^2$ の標準基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ を $T_p\mathbb{R}^2$ の基底と考えたものを $\left\{ \dfrac{\partial}{\partial x}_p, \dfrac{\partial}{\partial y}_p \right\}$ で表す．また，$\dfrac{\partial}{\partial x}_p$ を $p \in \mathbb{R}^2$ に対して $\dfrac{\partial}{\partial x}_p$ を与える写像と考えたものを $\dfrac{\partial}{\partial x}$ で表す．同様に $\dfrac{\partial}{\partial y}$ を定める．

[†11]図形の「向き」を数学的にきちんと定義することができて，丁度二つあることが示される．一つの向きを指定したとき，もう一つの向きを「逆の向き」と定める．「向き」は一般の写像では必ずしも写すことができないが，微分同相写像であれば必ず写すことができる．従って微分同相写像 f により向きは同じものに写されるか，さもなくば向きは丁度二つであるから，別のものに写される．前者の場合には f は向きを保ち，後者の場合には逆にする（向きを保たない）．

[†12]複素函数に関するコーシーの積分定理は非常に似ていて，関連が深いが別の定理である．コーシーの積分定理は（一般の）ストークスの定理と異なり，複素函数に特化しているが，その分深い（ストークスの定理がコーシーの定理に劣るということでは全くない）．

3) $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級の函数とする．$f\dfrac{\partial}{\partial x} + g\dfrac{\partial}{\partial y}$ で，$p \in \mathbb{R}^2$ に対して p におけるベクトル $f(p)\dfrac{\partial}{\partial x}_p + g(p)\dfrac{\partial}{\partial y}_p \in T_p\mathbb{R}^2$ を与える写像を表す．$f\dfrac{\partial}{\partial x} + g\dfrac{\partial}{\partial y}$ と表すことのできる写像を $\mathbb{R}^2$ 上の C^∞ 級の**ベクトル場**と呼ぶ．
4) $p \in \mathbb{R}^2$ とする．$T_p\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}$ への線型写像 dx_p, dy_p を条件

$$dx_p\left(\frac{\partial}{\partial x}_p\right) = 1, \quad dy_p\left(\frac{\partial}{\partial x}_p\right) = 0,$$
$$dx_p\left(\frac{\partial}{\partial y}_p\right) = 0, \quad dy_p\left(\frac{\partial}{\partial y}_p\right) = 1,$$

によりそれぞれ定める．また，$p \in \mathbb{R}^2$ に対して dx_p を与える写像を dx で表す．同様に dy を定める．dx_p, dy_p の $\mathbb{R}$ 上の線型結合全体の成す線型空間を $T_p^*\mathbb{R}^2$ で表し（$T_p\mathbb{R}^{2*}$ で表すこともある），$\mathbb{R}^2$ の p における**余接空間**（**cotangent space**）と呼ぶ．p における余接空間の元を p における**余接ベクトル**と呼ぶ．
※ dx_p, dy_p や $T_p^*\mathbb{R}^2$ の定義は次のようにするのがより正確である．$T_p^*\mathbb{R}^2$ で $T_p\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}$ への線型写像全体の成す線型空間を表す（即ち，$T_p^*\mathbb{R}^2$ を $T_p\mathbb{R}^2$ の双対空間とする）．$\left\{\dfrac{\partial}{\partial x}_p, \dfrac{\partial}{\partial y}_p\right\}$ の双対基底を $\{dx_p, dy_p\}$ とする．
5) $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級の函数とする．$fdx + gdy$ で，$p \in \mathbb{R}^2$ に対して p における余接ベクトル $f(p)dx_p + g(p)dy_p \in T_p^*\mathbb{R}^2$ を与える写像を表す．$fdx + gdy$ と表すことのできる写像を $\mathbb{R}^2$ 上の C^∞ 級の **1-形式**と呼ぶ
6) $X = f\dfrac{\partial}{\partial x} + g\dfrac{\partial}{\partial y}$ をベクトル場，$\omega = \alpha dx + \beta dy$ を 1-形式とする．このとき $\mathbb{R}^2$ 上の函数 $\omega(X)$ を $\omega(X)(p) = \omega_p(X_p)$ により定める．より具体的には

$$\omega_p(X_p) = (\alpha(p)dx_p + \beta(p)dy_p)\left(f(p)\frac{\partial}{\partial x}_p + g(p)\frac{\partial}{\partial y}_p\right) = \alpha(p)f(p) + \beta(p)g(p)$$

である．

ベクトル場は，特別なベクトル場 $\dfrac{\partial}{\partial x}$，$\dfrac{\partial}{\partial y}$ に重みをつけて足し上げたものと考えることができる．$\mathbb{R}^2$ 上の各点において重みは実数の組（$\dfrac{\partial}{\partial x}_p, \dfrac{\partial}{\partial y}_p$ の係数）であるが，重みは各点で異なっても良いことにすると，重みを与える函数が必要になる．このように考えると上の定義が自然に得られる．1-形式についても同様である．$\mathbb{R}^2$ 上の C^∞ 級の曲線が与えられると，その接ベクトル（速度ベクトル）を考えることができる（微分）．この逆の操作（積分）ができるとすると，それはあらかじめ与えられた（接）ベクトルから曲線を復元するということになる．この操作は微分方程式を解くことに他ならない．1 本の曲線の場合にはベクトルは $\mathbb{R}^2$ 全体では与えられていないが，少し話を飛躍させて $\mathbb{R}^2$ 上で一斉にベクトルが与えられたとき（つまり，$\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場が与えられたとき），それをうまく繋いで曲線（の族）を得ることを考えることができる．ベクトル場と微分方程式は（例えば）このように関連する．また，x の函数 y についての微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = f$ が与えられたとする．この方程式をおおらかに $dy = fdx$，更に $fdx - dy = 0$ と書き換えると左辺は 1-形式と形は同じである．微分方程式の解と，解から得られる曲線の接ベクトル（速度ベクトル）が対応すると考えることにして定義 12.32 の 6) を踏まえると，ベクトル場に関する方程式 $(fdx - dy)(X) = 0$ を解くことは微分方程式を解くことに対応する（ここでは $fdx - dy$ は本当に 1-形式と考えている）．これは実際に正当化できて，$fdx - dy = 0$ をベクトル場に関する方程式と看做すことと，微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = f$ を解くことはほぼ同値と考えることができる．方程式 $fdx - dy = 0$ を常微分方程式の立場からとらえたものが全微分方程式である．

（以上）