'12/11/27 誤植（問 9.3）の訂正，'12/11/28 誤植（式 (9.4)）の訂正，
'12/11/29 g は全単射であるという仮定が抜けていたので修正（2 頁 6 行）

問 9.1. 以下の積分（積分値）に関する問に答えよ．3)，4) に関しては直接証明しても構わないし，講義で示した定理を適宜用いても良い．

1) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1,\ 4x^2 + 9y^2 \geq 1\}$ とするとき，$\displaystyle\int_S dxdy$ を求めよ．
2) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1,\ 4x^2 + 9y^2 \geq 1\}$ とするとき，$\displaystyle\int_S (x+y)dxdy$ を求めよ．
3) P を閉区間の直積とし，$f\colon P \to \mathbb{R}$ を可積分函数とする．$g\colon P \to \mathbb{R}$ は P の有限個の点 $p_1, \ldots, p_r$ 以外では f と一致しているとする．つまり，$x \in P \setminus \{p_1, \ldots, p_r\}$ ならば $f(x) = g(x)$ が成り立つとする．このとき，g は P 上可積分であって $\displaystyle\int_P g(x)dx = \int_P f(x)dx$ が成り立つことを示せ．
4) $P = [0, 1]^2$ とし，$l\colon [0, 1] \to P$ を l に含まれる C^1 級の正則な曲線とする．つまり，l を C^1 級の函数とし，$t \in [0, 1]$ であれば $Dl(t) \neq 0$ が成り立つとする．また，$l([0, 1]) = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, \exists t \in [0, 1]\ \text{s.t.}\ x = l(t)\}$ と置く．さて，$f\colon P \to \mathbb{R}$ を可積分函数とし，$g\colon P \to \mathbb{R}$ を函数であって，$P \setminus l([0, 1])$ 上 f と一致するものとする．このとき g も P 上可積分であって，$\displaystyle\int_P g(x)dx = \int_P f(x)dx$ が成り立つことを示せ．

以下では積分の座標変換（変数変換）について，多少厳密さを無視して考察する．まず，一変数の場合には次が成り立つのであった（講義で扱ったものより少し簡略化してある）．

定理. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を連続とし，$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は C^1 級とする．$a, b \in \mathbb{R}$，$a < b$ とし，また，$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ について $g(\alpha) = a, g(\beta) = b$ が成り立つとすると

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f \circ g(t) Dg(t) dt = \int_\alpha^\beta f \circ g(t) \frac{dg}{dt}(t) dt \tag{9.2}$$

が成り立つ．

例えばこれは $\mathbb{R}^2$ 内の曲線の長さを求める時などに有用である．

問 9.3. $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ を C^1 級の函数とする．$l\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ を $l(t) = (t, f(t))$ により定めると，l は C^1 級の正則な曲線である（問 9.1 を参照のこと）．$s \in [0, 1]$ の時，l の $l(0)$ から $l(s)$ までの長さ $L(s)$ を $L(s) = \displaystyle\int_0^s \sqrt{1 + Df(t)^2} dt$ により定める（l を質点の移動と看做せば，$(t, f(t))$ における速度ベクトルは $(1, Df(t))$ で与えられ，L の定義式の被積分函数はこのベクトルの長さであることに注意）．以下の f から定まる曲線 l はそれぞれ C^1 級の正則な曲線であることを確かめ，$L(s)$ を求めよ．

1) $f(t)=\cosh t=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$（これは変数変換を考えない方が楽である）.

2) $f(t)=\sqrt{1-\left(\sqrt{2}\left(t-\dfrac{1}{2}\right)\right)^2}$.

さて，二変数函数について，変数変換公式がどうなるべきか考えてみる．そこで，$f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ であって，$g\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ は C^1 級とする．g は二変数函数であるが，C^1 級なので全微分 Dg が存在し，連続である．そこで安直に式 (9.2) をまねして，$\mathbb{R}^2$ 内の有界閉集合 K,X について $K=g(X)$ が成り立ち，$g\colon X\to K$ と看做すと全単射であるとき（K,X はとりあえず閉区間の直積と考えてよいが，実際には g がかなり単純でないと閉区間の直積について $K=g(X)$ は成り立たないので，本当はそうもいかないことには注意せよ）

(嘘の式１)
$$\int_K f(x,y)dxdy=\int_X f\circ g(t,s)Dg(t,s)dtds$$
が成り立つと期待してみる．しかしこれは全く破綻している．左辺については f は実数値函数なので通常の積分であるが，右辺については $f\circ g(t,s)Dg(t,s)$ は行列値函数なので，仮に積分できたとしても値は行列になってしまう．そこで積分の定義に戻ってみる．$\displaystyle\int_K f(x,y)dxdy$ は，K を閉区間の直積の集まり $\{I_k\}$ で近似して，$c_k\in I_k$ を任意に定めて和 $\sum c_k v(I_k)$ を考え，分割を細かくしていった時の極限値であった．ここで $v(I_k)$ は I_k の体積（面積，長さ）である．一変数の場合に戻り，式 (9.2) の右辺にこれを当てはめてみると，$\displaystyle\int_\alpha^\beta f\circ g(t)Dg(t)dt$ というのは $(f\circ g)Dg$ に関して上のように積分を考えたということになるが，見方を変えると $f\circ g$ について $v(I_k)$ の代わりに $Dg(c_k)v(I_k)$ を考えて値を定めたとも看做せる．最後の $Dg(c_k)v(I_k)$ は直感的には次のような値であると理解できる（例によって本当は証明が必要なことである）．g は C^1 級なのであるから $g(t)$ は $t=c_k$ の近くでは大雑把には $g(c_k)+Dg(c_k)(t-c_k)$ により近似される．後者の函数により I_k を写して得られる $\mathbb{R}$ の部分集合を J とすると $v(J)=Dg(c_k)v(I_k)$ が成り立つ（$Dg(c_k)=0$ であったり，$Dg(c_k)<0$ である場合には右辺は長さとは言い難いが，ここではおおらかに考えているのでまあいいことにする）．従って $Dg(c_k)v(I_k)$ とは $v(g(I_k))$ であることが期待される．さて，このようなことが二変数の場合にも成り立つと楽観すると，次が成り立つはずである．

(嘘の式２)

条件 $Dg(t,s)\neq 0$ が $(t,s)\in X$ について成り立つならば
$$\int_K f(x,y)dxdy=\lim_{\delta(\Delta)\to 0}\sum_{I_k\in\mathcal{I}(\Delta)} f\circ g(c_k)(I_k\text{ を }g\text{ で写して得られる図形の面積})$$
ここで「I_k を g で写して得られる図形の面積」について考えてみる．一変数の時と同様に，g が C^1 級であることを用いて，$(t,s)=c_k$ の近くで g は $g(c_k)+Dg(c_k)\begin{pmatrix}t\\s\end{pmatrix}$ で近似されることを用いると，近似的には「I_k を g で写して得られる図形の面積」は $\det Dg(c_k)v(I_k)$

で与えられることがわかる（証明は線型代数（行列式）の範疇である（しかもそれなりに長い）ので，ここではしない）．従って，ここまでの話を信じるのであれば，期待できる式は次のようなものになる．

(嘘の式２')
$$\int_K f(x,y)dxdy = \int_X f \circ g(t,s) \det Dg(t,s) dtds$$
が成り立つ．

しかし，よく考えるとこれでもおかしい．例えば $K = X = [0,1] \times [0,1], f = 1$ とし，$g(t,s) = (1-t,s)$ とする．左辺は 1 であることが容易にわかる．右辺については $\displaystyle\int_X f \circ g(t,s) \det Dg(t,s) dtds = \int_X (-1) dtds = -1$ が成り立つ．これは「$dxdy$」や「$dtds$」が一変数の場合には「行ったり来たり」にあたることをきちんと反映していないことに起因する（一方,「dx」や「dt」はきちんと反映しているので話が破綻しない．二つ以上「掛ける」と話が変わってしまうのである）．(嘘の式２') は図形の「向き」という概念を用いるときちんと書き直すことができるが，ここでは次で満足しておくことにする．一変数の場合には「行ったり来たり」が起きないための条件は $v(g(I_k)) \neq 0$ が常に成り立つことであったので，これの二変数版を考える．すると条件は $\det Dg(t,s) \neq 0$ となる．これを仮定し，次を期待する．

(9.4) 条件 $\det Dg(t,s) > 0$ が $(t,s) \in X$ について成り立つならば
$$\left| \int_K f(x,y)dxdy \right| = \left| \int_X f \circ g(t,s) \det Dg(t,s) dtds \right|$$
が成り立つ（条件は $\det Dg(t,s) < 0$ としてもよい）．絶対値がついているのは，一変数の場合でいえば g で写すと左右が入れ替わるような事態を想定しているからである．これは f や g にそれなりの仮定を置けば証明可能な事実であるので，後日講義で扱う．

問 9.5. $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$，$\Psi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ をそれぞれ
$$\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta),$$
$$\Psi(r,\theta,\varphi) = (r\cos\varphi\cos\theta, r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi)$$
によりそれぞれ定める．

1) $\Phi(r,\theta)$ および $\Psi(t,\theta,\varphi)$ を図示せよ．
2) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \leq x^2+y^2 \leq 4,\ -1 \leq \tan\dfrac{y}{x} \leq 1\}$ と置く．$\displaystyle\int_S dxdy$ を求めよ．
3) $r \geq 0$ とし，$S_r = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2 \leq r^2\}$ と置く．$F(r) = \displaystyle\int_{S_r} dxdydz$ を求めよ．また，$\dfrac{dF}{dr}(r)$ を求めよ．

問 9.6. $v, w \in \mathbb{R}^3$ とする．$S = \{u \in \mathbb{R}^3 \,|\, \exists t,s,\in \mathbb{R} \text{ s.t. } t \geq 0,\ s \geq 0,\ t+s \leq 1,\ u = tv+sw\}$ と置く．

1) $v = {}^t(1\ 0\ 0), w = {}^t(0\ 1\ 1)$ の時 S を図示せよ．また，一般の場合 S はどのような図形であるか説明せよ（直感的でよい）．

2) $A = (v\ w) \in M_{3,2}(\mathbb{R})$ とし，$v(S) = \sqrt{\det {}^tAA}$ と置く．v, w が共に xy-平面，yz-平面，zx-平面のいずれか一つ（P とする）に含まれるとき，$v(S)$ は $P \cong \mathbb{R}^2$ 内の図形と看做したときの S の面積に等しいことを示せ.

※ $\mathbb{R}^3$ 内の図形の「面積」を適切に定義すると $v(S)$ は S の面積となる.

変数変換公式の直感的な導出を踏まえて次のように定める.

定義. $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ を C^1 級とし，$(x,y) \in \mathbb{R}^2$ のとき $\operatorname{rank} Df(x,y) = 2$ が成り立つとする．$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in [0,1],\ z = f(x,y)\}$ と置く．このとき，$F(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix}$ と置き，

$$S(\Sigma) = \int_{[0,1]^2} \sqrt{\det {}^tDF(x,y)DF(x,y)}dxdy$$

と定める（曲線の長さとの類似に注意せよ．曲線の場合には $F(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ となり，$DF(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ Df(x) \end{pmatrix}$ である）．

問 9.7. 1) $f(x,y) = \cosh(x^2+y^2) = \dfrac{e^{x^2+y^2} + e^{-(x^2+y^2)}}{2}$ と置く．$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq 1,\ z = f(x,y)\}$ とするとき，$S(\Sigma)$ を求めよ.

※ 必要に応じて変数変換してよいが，現時点では，積分区間（本当は区間ではないが，一変数の場合に準じてここではこのように呼ぶことにする）の境界での処理を厳密に行うのは難しいはずである．どこが曖昧になっているかも考えよ.

2) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は正の値をとる C^1 級の函数とする．xyz-空間において，xy-平面における f のグラフを x 軸の周りに回転させて得られる図形のうち，$0 \leq x \leq 1$ の部分を Σ とする．すなわち，$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2+z^2 = f(x)^2,\ 0 \leq x \leq 1\}$ とする．このとき Σ の面積は $2\pi \displaystyle\int_0^1 f(x)\sqrt{1+Df(x)^2}dx$ で与えられることを上の定義を用いて示せ.

ヒント：まず Σ をある函数 F のグラフとして表す．全体を一度には扱えないので Σ を適当に分割する必要がある.

（以上）