２０１２年度数学 IA 演習（理 I 35–39 組）　第６回　　'12/10/9（火）４限
'12/10/9 一部訂正の上加筆

問 6.1. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ を実数列とする．以下の命題について，否定（否定命題）を，否定の記号を用いないで述べよ．1) と 3) については必要に応じて同値な命題に書き換えた上で対偶（対偶命題）を，否定の記号を用いないで述べよ．

1) 命題「$\forall n \in \mathbb{N}^+,\ a_n > 0$」
2) 命題「$\exists n \in \mathbb{N}^+ \text{ s.t. } a_n > 0$」
3) $N \in \mathbb{N}^+$ とする．命題「$n > N \Rightarrow a_n > 0$」
4) 命題「$\exists N \in \mathbb{N}^+ \text{ s.t. } n > N \Rightarrow a_n > 0$」

ヒント（却ってわかりにくくなる場合には無視すること）:
1), 2) について．扉がいくつかあって，各々について鍵がかかっているかあるいはかかっていないかのいずれかであるとする．
・「「全ての扉について，鍵がかかっている」状況ではない」状況
・「「ある扉について，鍵がかかっている」状況ではない」状況
がどのような状況か，否定を用いずに表すにはどうするか考えてみよ．

3), 4) について．命題「$A \Rightarrow B$」の定義は「$\neg A$ または B」，即ち「A が成り立たない（正確に言えば A の否定が成り立つ）か，B が成り立つ」ことである（$\neg$ は否定命題を表す記号である）．少し乱暴であるが，直感的には例えば次のように考えることができる（あくまで直感的な「説明」である）．命題「A ならば B」は，命題（実際にはしばしば仮定である）A が成り立つとき初めて問題になりうる命題である．A が成り立つという前提の下では，B が成り立つことと「A ならば B」が成り立つことは（A が成り立っているのだから）同値である．一方，A が成り立たない（正確には A の否定が成り立つ）という前提の下では,「A ならば B」は無邪気に成り立つと考える（本当はここは深刻である）．このようにすると「A ならば B」は「A が成り立たないか，あるいは B が成り立つ」ことと同値になる．もしくは，もう少し「それっぽく」次のように考えることもできる．まず,「「$A \Rightarrow B$」ではない」状況を考える．つまり,「「命題 A が成り立つならば，命題 B は（も）成り立つ」状況ではない」という状況を考える．これを平たく言えば「命題 A が成り立つのに命題 B は成り立たない」状況，つまり「A かつ $\neg B$ が成り立つ」である．これが「$A \Rightarrow B$」の否定であるから，もう一度否定をとると,「「A かつ $\neg B$」が成り立たない」となり，これは（ド・モルガンの法則により）「$\neg A$ または B が成り立つ」と同値である．別な見方として，命題「$\neg A \Rightarrow B$」について考えてみる（これは「A または B」となるはずである）．この命題が成り立つことを,「A が成り立っているのであれば別にそれは構わないが，もし A が成り立たないのならば B が成り立つ」と考えると「A または B」が成り立つ，ということになり，辻褄があう．

問 6.2. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を函数とする．

1) f が $\mathbb{R}$ 上連続（$\mathbb{R}$ 上至る所連続，とも言う）であることの定義を述べよ．
2) f が $\mathbb{R}$ 上一様連続（こちらについては，$\mathbb{R}$ 上至る所一様連続，とは言わない）であることの定義を述べよ．
3) f が $\mathbb{R}$ 上至る所不連続である（連続でない）ことを，否定の命題や記号を用いないで述べよ．

問 6.3. $f, g\colon (0,2) \to \mathbb{R}$ を $f(x) = \dfrac{1}{x},\ g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ により定める．

1) $x = 1$ を中心とする f と g のテーラー級数を求めよ．

2) $0<c<1$ とする．1) で求めた級数は $[c, 2-c]$ 上 f に一様収束することを示せ．つまり，1) で求めた級数を $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-1)^n$ とすると，

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall x \in [c, 2-c],\ \forall m \geq M,\ \left| \sum_{n=0}^{m} a_n(x-1)^n - f(x) \right| < \varepsilon$$

が成り立つことを示せ．

3) 1) で求めた f のテーラー級数を（多項式と同じように）項毎に微分し，g のテーラー級数と比較せよ．

問 6.4. この問では $\mathbb{R}^2$ の元を（線型代数のように）縦ベクトルで表す．
$\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| r > 0 \right\}$ により定める．また，$\varphi\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を $\varphi\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$ により定める（左辺は本来は $\varphi\left(\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}\right)$ と表すべきであるが，煩雑になるので括弧を省いた）．$l\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ 上の（$\mathbb{R}^2$ 内の）C^∞ 級の曲線とし（つまり，l は C^∞ 級の函数であるとし），変数を t とする．ただし，本問では l は正則とは仮定しない．つまり，$\forall t \in \mathbb{R},\ Dl(t) \neq 0$ とは仮定しない．

1) $t = t_0 \in \mathbb{R}$ における l の接ベクトルを $Dl(t_0)$ により定める．$Dl(t_0)$ は $\mathbb{R}^2$ の元であることを踏まえて，$\mathbb{R}^2$ の部分集合 T を

$$T = \{ v \in \mathbb{R}^2 \mid \text{ある } C^\infty \text{ 級の曲線について } v = Dl(t_0) \}$$

と置く．すると $T = \mathbb{R}^2$ が成り立つことを示せ．

2) T を 1) のように定める．T の元は $\mathbb{R}^2$ の元ではあるが，$l(t_0)$ におけるベクトルであるので，場所を区別するために T を $T_{l(t_0)}\mathbb{R}^2$ で表す（なお，$T_{l(t_0)}\mathbb{R}^2$ の「$\mathbb{R}^2$」は，$l(t_0)$ が属している空間としての $\mathbb{R}^2$ である．$Dl(t_0)$ が属している $\mathbb{R}^2$ のことではない）．l を $\mathbb{R}^2$ 上の C^∞ 級の曲線とするとき，$l'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を $l' = \varphi \circ l$ により定めると，l' は C^∞ 級であることを確かめよ．従って l' も $\mathbb{R}^2$ 上の C^∞ 級の曲線である．

3) $t = t_0$ とする．l' の $t = t_0$ における接ベクトル $Dl'(t_0)$ を $D\varphi(l(t_0))$ と $Dl(t_0)$ を用いて表せ．

4) 3) により，$D\varphi(l(t_0))$ は $T_{l(t_0)}\mathbb{R}^2$ から $T_{l'(t_0)}\mathbb{R}^2$ への写像と看做すことができる．この写像を F とすると F は実線型写像であることを示せ．実線型写像の定義を知らない者は線型代数の教科書で調べること．

5) $T_{l(t_0)}\mathbb{R}^2$ と $T_{l'(t_0)}\mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ と（自然に）同一視する．4) の F を $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への写像と看做すと，$A \in M_2(\mathbb{R})$ が一意的に存在して $\forall v \in \mathbb{R}^2,\ F(v) = Av$ が成り立つことを示せ．また，この A を具体的に求めよ．

（以上）