２０１２年度数学 IA 演習（理 I 35–39 組）　第５回　　　　　'12/6/19（火）４限
'12/6/19 一部訂正

特に断らなければ $\varepsilon \in \mathbb{R},\ N \in \mathbb{N}^+$ とする．また，時々ヒントを記すが無理に用いる必要はない．一方，用いるのであればヒントに書かれていることもよほど当たり前のことでない限り示すこと．

問 5.1 (これは各小問毎に発表すればよい). 次に挙げる函数の，与えられた点を中心とするテーラー展開を求めよ．また，a_n を n 次の項の係数とするとき，$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ を求めよ（この値の逆数（ただし，$\dfrac{1}{+\infty} = 0,\ \dfrac{1}{0} = +\infty$ と考える）はテーラー展開（級数）の**収束半径**と呼ばれる）．

1) $f(x) = \sin x^2$ とし，中心は 0 とする．
2) $f(x) = \sin x$ とし，中心は $\dfrac{\pi}{2}$ とする．
3) $f(x) = x - x^2$ とし，中心は 1 とする．
4) $f(x) = \log(1 + x^2 + x^3)$ とし，中心は 0 とする．
5) $f(x, y) = \sin(x + y)$ とし，中心は $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ とする．
6) $f(x, y) = e^x \cos y$ とし，中心は $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ とする．
7) $f(x, y) = e^{x+x^2}$ とし，中心は 0 とする．
8) $f(x, y) = \dfrac{1}{1 + x}$ とし，中心は 0 とする．
9) $f(x) = \tan^{-1} x$ とする．ただし，$f(0) = 0$ であるとする．また，中心は 0 とする．

注. 問 5.1 の 9) において，f としては $f(0) = \pi n$，ただし $n \in \mathbb{Z}$ であるようなものを考えることもできるが，そのうち $f(0) = 0$ であるようなもの選んでいる．このように候補がいくつかあるときにそのうちの一つを決めることを枝（分枝）を選ぶ（定める）などと言う．枝を選ぶ場面は逆函数を考えるときに多く現れる．例えば $f(x) = x^2$ の逆函数を g とすると $g(y) = \sqrt{y}$ あるいは $g(y) = -\sqrt{y}$ である．g は f の値域でしか意味を持たないので，$y \geq 0$ であるのは仕方がないが，$y > 0$ のときと $y = 0$ の時では次のように状況が異なる．$y_0 > 0$ のときには $y_0 = f(x_0)$ であるような x_0 を一つ選ぶと，それに応じて $g(y_0) = x_0$ であるような枝が唯一つ定まる．また，g は y_0 を含む開区間で定まっている．一方，$y_0 = 0$ の時には $y_0 = f(x_0)$ とすると（$x_0 = 0$ であるから）$g(y_0) = x_0$ であるような枝が複数ある．また，それぞれの枝は y_0 を含む開区間では定義されない．これは

$Df(x_0) = 0$ であることに起因する．$Df(x_0) \neq 0$ である時の状況について正確に述べたのが陰函数定理である．

問 5.2. ここではテーラー展開の中心は 0 とする．また，$\cos x$ のテーラー展開を $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ とする．

1) a_n を求めよ．
2) $k \in \mathbb{N}^+$ とする．$\cos x^k$ のテーラー展開は $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{kn}$ であることを示せ．
3) $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)^2$ を計算し，$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ の形に表せ（ただし，二乗の計算は形式的に（収束を無視して）多項式のように行って良い（このような操作が正当化されるための条件を既に知っている者は，その条件がみたされるかどうか調べてみよ．講義・演習ではこれは後期で扱う）．また，$\cos^2 x$ のテーラー展開を定義に戻って直接求め，$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ と比較せよ．
4) $\cos^2 x = \dfrac{\cos 2x + 1}{2}$ であることを用いて $\cos^2 x$ を，$\cos x$ のテーラー展開を用いて級数として表し，直接求めたテーラー展開と比較せよ．

定義 (定義 2.17 と同一である)．$U \subset \mathbb{R}^n$ を部分集合とし，各 $n \in \mathbb{N}^+$ について f_n は U 上で定義された $\mathbb{R}^m$ 値函数であるとする．また，$f \colon U \to \mathbb{R}^m$ とする．

1) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ が $n \to +\infty$ の時 f に U 上**各点収束**するとは，$\forall x \in U,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N > 0$ s.t. $n \geq N \Rightarrow \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$ が成り立つことを言う．
2) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ が $n \to +\infty$ の時 f に U 上**一様収束**するとは，$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N > 0$ s.t. $n \geq N \Rightarrow \forall x \in U,\ \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$ が成り立つことを言う．

問 5.3. $U \subset \mathbb{R}^n$ を部分集合とし，各 $n \in \mathbb{N}^+$ について f_n は U 上で定義された $\mathbb{R}^m$ 値函数であるとする．また，$f \colon U \to \mathbb{R}^m$ とする．$\{f_n\}$ が $n \to +\infty$ の時 f に U 上一様収束するならば，$\{f_n\}$ は $n \to +\infty$ の時 U 上 f に各点収束することを示せ．また，逆が成り立たないような例を $U = \mathbb{R},\ m = 1$ の場合に一つ挙げよ．

問 5.4. 各 $n \in \mathbb{N}^+$ について，f_n は $\mathbb{R}$ 上定義された C^∞ 級の函数とする．また，f を $\mathbb{R}$ 上の函数とし，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ は $n \to +\infty$ の時 f に $\mathbb{R}$ 上一様収束するとする．

1) f は連続であることを示せ（実際には各 f_n が連続であれば十分である）．

2) f は C^∞ 級であるとする．$\{f_n\}$ は f に $\mathbb{R}$ 上一様収束するが，$\{Df_n\}$ は Df に各点収束しないような例を挙げよ．

問 5.5. C^1 級の函数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は常微分方程式 $Df = 2f$, $f(0) = 1$ の解であるとする．実際には解は $f(x) = e^{2x}$ であるが，以下ではこのことは用いないこと．

1) f は C^∞ 級であることを示せ（C^1 級の函数が必ず C^∞ 級であるというのは勿論正しくない）．

2) f は 0 を中心としてテーラー展開可能であると仮定し，f の 0 を中心とするテーラー展開を求めよ（実際にはテーラー展開可能と仮定しなくとも，まずテーラー展開の候補を求め，それが正の収束半径を持つことを示すことができる）．

※ 微分方程式の解はこのように「良い」性質（今の場合テーラー展開可能）を持つことが多い．ただし，どのような良い性質を持つかは微分方程式による．

問 5.6. $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級の函数とする．

1) $D^2(f \circ g)$ を f, g とその微分を用いて表せ．

2) f_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$ を $\mathbb{R}$ 上定義された微分可能な函数とする．$F = \det \begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n1} & \cdots & f_{nn} \end{pmatrix}$ と置くとき，DF を適当な行列式の和の形に表せ．

問 5.7. $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$, $\coth = \dfrac{1}{\tanh x}$ と定め，それぞれ**双曲余弦函数**，**双曲正弦函数**，**双曲正接函数**，**双曲余接函数**と呼ぶ．また，これらを総称して**双曲線函数**と呼ぶ．

1) それぞれについて，0 を中心とするテーラー展開とその収束半径を求めよ．

2) それぞれについて，三角函数の加法公式の類似が成り立つ．これらを定式化し（主張（今の場合にはどのような式がなりたつのか）を具体的に表し），証明せよ．

問 5.8. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は原点において微分可能であるとする．

1) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x}, & x \neq 0, \\ Df(0), & x = 0 \end{cases}$ により定めると g は連続であることを示せ．

2) $f(0) = 0$ とすると，ある連続な函数 $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が存在して $f(x) = xh(x)$ が $\mathbb{R}$ 上成り立つことを示せ．

問 5.9. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は単調増加であるとする．このとき，$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$ は $+\infty$ に発散するか，あるいはある実数に収束することを示せ．

ヒント：例えば単調増加な数列の収束（あるいは発散）の話に帰着することができる．

問 5.10. P を多項式とし，$x \in \mathbb{R}$ について $f(x) = \dfrac{P(x)}{e^x}$ と置く．$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ が成り立つことを示せ．

問 5.11. $x > 0$ について $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ と置く．

1) 各 $n \in \mathbb{N}^+$ について，高々 $(n-1)$ 次の多項式 P_n が存在して $D^n f(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}}$ が成り立つことを示せ．
2) 各 $n \in \mathbb{N}$ について（$n = 0$ の場合も含むので注意）$\displaystyle\lim_{x \to +0} D^n f(x) = 0$ が成り立つことを示せ．
3) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $g(x) = \begin{cases} f(x), & x > 0, \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$ により定める．g は C^∞ 級であることを示せ．
4) g は $(-1, 1)$ 上でテーラー展開不可能であることを示せ．

問 5.12. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ を $z = x + \sqrt{-1}y$ と同一視することにより，$\mathbb{R}^2$ を $\mathbb{C}$ とみなす．$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ が微分可能である時，形式的に

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \sqrt{-1}\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$
$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \sqrt{-1}\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

と置く．$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ は $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = 0$ をみたすとし，以下の問に答えよ．

1) ${}^t Df(x,y) Df(x,y) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)^2 + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)^2\right) I_2$ が成り立つことを示せ．従って $Df(x,y)$ は直交行列の定数倍である．
2) $\langle \cdot | \cdot \rangle$ で $\mathbb{R}^2$ の通常の内積を表す．$v, w \in \mathbb{R}^2$ とし，$D_v f(0), D_w f(0)$ をそれぞれ f の 0 における v 方向，w 方向への微分とする．$v, w \neq 0$ かつ $Df(0)$ は正則であるとすると $\dfrac{\langle D_v f(0) | D_w f(0) \rangle}{\|D_v f(0)\| \, \|D_w f(0)\|} = \dfrac{\langle v | w \rangle}{\|v\| \, \|w\|}$ が成り立つことを示せ（これは $D_v f(0)$ と $D_w f(0)$ のなす角は v と w のなす角と等しいことを意味する）．

（以上）