２０１２年度数学IA演習（理I 35–39組）　第３回　　'12/5/22（火）４限

※ '12/5/22，'12/5/23，'12/6/19，'12/6/20，'12/8/25 に修正を加えた．

特に断らなければ $\varepsilon \in \mathbb{R},\ N \in \mathbb{N}^+$ とする．また，時々ヒントを記すが無理に用いる必要はない．一方，用いるのであればヒントに書かれていることもよほど当たり前のことでない限り示すこと．

問 3.1 (これは黒板では発表せず，自習[†1]せよ)．$z \in \mathbb{C}$ とする．$z = x + \sqrt{-1}y,\ x, y \in \mathbb{R}$ と表し，$f(z) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ とすると $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$ が定まる．

1) f は全単射であることを示せ．つまり，$\forall v \in \mathbb{R}^2,\ \exists z \in \mathbb{C}$ s.t. $f(z) = v$（全射性）及び $z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ f(z_1) = f(z_2) \Rightarrow z_1 = z_2$（単射性）が成り立つことを示せ．
2) $z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ について $f(\lambda z_1 + \mu z_2) = \lambda f(z_1) + \mu f(z_2)$ が成り立つことを示せ．これは f が $\mathbb{C}$ から $\mathbb{R}^2$ への**実線型写像**であることを意味する．
3) $\lambda \in \mathbb{C}$ とする．$\lambda = \alpha + \sqrt{-1}\beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とする．すると，ある 2 行 2 列の実行列 A が存在して $\forall z \in \mathbb{C},\ f(\lambda z) = Af(z)$ が成り立つ．A を α, β を用いて表せ．
4) $\bar{z} = x - \sqrt{-1}y$ と置き，z の**複素共役**（複素共軛[†2]）と呼ぶ．$f\left(\overline{f^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}\right)$ を x, y で表せ．

問 3.1 の f を用いて $\mathbb{R}^2$ を $\mathbb{C}$ とみなしたもの（同一視したもの）を**ガウス平面**あるいは複素平面と呼ぶ[†3]．

定義 3.2. $z \in \mathbb{C}$ とする．$|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ と置いて z の**絶対値**と呼ぶ．また，$|z| \neq 0$ の時，$z = |z|\, e^{\sqrt{-1}\theta} = |z|\,(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$ が成り立つような $\theta \in \mathbb{R}$ を z の**偏角**と呼び，$\arg z$ などと表す．θ が z の偏角であれば $n \in \mathbb{Z}$ について $\theta + 2\pi n$ も z の偏角である．これでは不便な場合には，例えば偏角は $[0, 2\pi)$ や $[-\pi, \pi)$ に属すると人為的に仮定する，

定理 3.3 (前期あるいは後期のいずれかで扱う)．$z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ とする．

1) $e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$ が成り立つ．
2) $z \in \mathbb{R}$ とすると $e^{\sqrt{-1}z} = \cos z + \sqrt{-1}\sin z$ が成り立つ．

問 3.4. $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ とする．

1) $|z| \geq 0$ が成り立つことを示せ．また，$|z| = 0$ と $z = 0$ は同値であることを示せ．

[†1]自習と独習とは必ずしも一致しない．

[†2]常用漢字表あるいは指導要領の都合だと思うが,「役」と「軛（くびき）」では意味が異なる．本来は後者である．

[†3]複素数平面というのは恐らく教科書用の造語である．

2) $|z_1z_2| = |z_1|\,|z_2|$ が成り立つことを示せ.

3) $z_1, z_2 \neq 0$ とする．すると z_1 と z_2 の偏角の和と z_1z_2 の偏角は等しいことを示せ.

4) $|e^z|$ を z の実部と虚部を用いて表せ.

5) $z \in \mathbb{C},\ z \neq 0$ とする．このとき $w \in \mathbb{C}$ が存在して $z = e^w$ が成り立つことを示せ．また，このような w を全て求めよ.

6) $|\bar{z}| = |z|$ が成り立つことを示せ．また，$\arg \bar{z} = -\arg z$ が成り立つことを示せ.

7) $z \in \mathbb{C}$ とし，$z = x + \sqrt{-1}y,\ x, y \in \mathbb{R}$ と表す．$|z| = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|$ が成り立つことを示せ.

問 3.5. $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ とする．また，z_1, z_2 の実部と虚部はそれぞれ正の実数であるとする.

1) $z_1 + z_2$ を作図せよ.

2) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ が成り立つことを示せ.

3) z_1z_2 を作図せよ.

問 3.6. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ を複素数列とする.

1) $a_n = r_n e^{\sqrt{-1}\theta_n}$ と $r_n \geq 0,\ \theta_n \in \mathbb{R}$ を用いて表す．$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ が成り立つことと，$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} r_n = 0$ が成り立つことは同値であることを示せ.

2) $a \in \mathbb{C},\ a \neq 0$ とする．$r > 0,\ \theta \in \mathbb{R}$ を用いて $a = re^{\sqrt{-1}\theta}$ と表す．このとき，以下は同値であることを示せ.

   (a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ が成り立つ.

   (b) 十分大きな n について $a_n \neq 0$ が成り立ち，かつ $\theta_n \in (\theta - \pi, \theta + \pi)$ が一意的に存在して $a_n = |a_n|\,e^{\sqrt{-1}\theta_n}$ が成り立つ．更に，$\{a_n\}$, $\{\theta_n\}$ に関して $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} |a_n| = |a|$ かつ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \theta_n = \theta$ が成り立つ.

   ヒント：(a) が成り立つならば $\forall r > 0,\ \exists N > 0\ \text{s.t.}\ n \geq N \Rightarrow a_n \in B_a(r)$ が成り立つ．一方，r が十分小さければ $B_a(r) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, z \neq 0\}$ が成り立つ．さらに，$B_a(r)$ は中心角が小さい扇形に含まれる.

定義 3.7. $v = {}^t(v_1\ \cdots\ v_n) \in \mathbb{C}^n$ とする．また，$p \in \mathbb{R},\ p \geq 1$ とする．$\|v\|_p = (|v_1|^p + \cdots + |v_n|^p)^{\frac{1}{p}}\ (\in \mathbb{R})$ と置いて ***v* の *p*-ノルム**と呼び，$\|\cdot\|$ を $\mathbb{R}^n$ の ***p*-ノルム**と呼ぶ[†4]．また，$\|v\|_\infty = \displaystyle\max_{1\leq i\leq n} |v_i|$ と置いて v **の最大値ノルム**と呼ぶ．1-ノルムを**絶対値ノルム**と呼ぶことがある.

[†4] p-進ノルムと呼ばれるノルムも存在する（ここでは扱わない）が，混同しないこと．なお，p-進ノルムは $\mathbb{R}^n$ 上のノルムではない.

2-ノルムは高校までで用いてきたベクトルの長さと同じものである．また，複素数の絶対値は $\mathbb{C}$ をガウス平面と考えて $\mathbb{R}^2$ と同一視すれば $\mathbb{R}^2$ の 2-ノルムである．一般の p-ノルムも，ベクトルの長さの持ついくつかの性質をそのまま持つ．

問 3.8. $p \geq 1$ あるいは $p = \infty$ とする．また $v, w \in \mathbb{C}^n$ とし，$\lambda \in \mathbb{C}$ とする．以下の性質のうち 1) と 2) が成り立つことを示せ（3) は少し大がかりになるので問 3.10 と 3.11 に回す）．

1) $\|v\|_p \geq 0$ であって，等号が成立することは $v = 0$ と同値である．
2) $\|\lambda v\|_p = |\lambda| \, \|v\|_p$ が成り立つ．
3) $\|v + w\|_p \leq \|v\|_p + \|w\|_p$ が成り立つ．

一般に，V が線型空間であるとき，上の三つの性質を持つ V から $\mathbb{R}$ への写像を $\boldsymbol{V}$ **（上）のノルム**と呼ぶ．

2-ノルムは内積（計量）と関係が深く，次が成り立つ．

問 3.9. $\langle \cdot | \cdot \rangle$ で $\mathbb{R}^n$ の標準内積を表す．つまり，$v = {}^t(v_1 \ \cdots \ v_n)$, $w = {}^t(w_1 \ \cdots \ w_n) \in \mathbb{R}^n$ について，$\langle v | w \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$ と置く．また，v の 2-ノルムを $\|v\|$ で表す．

1) $\forall v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\|^2 = \langle v | v \rangle$ が成り立つことを示せ．
2) $\forall v, w \in \mathbb{R}^n$, $\langle v | w \rangle = \dfrac{\|v + w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2}{2}$ が成り立つことを示せ．
3) $n > 1$ とし，$p \geq 1$ あるいは $p = \infty$ とする．$\mathbb{R}^n$ のある内積（標準内積とは限らない）$\langle \cdot | \cdot \rangle'$ について 1) と同様の性質 $\forall v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\|_p^2 = \langle v | v \rangle'$ が成り立つのであれば $p = 2$ であることを示せ．
4) $p \geq 1$ あるいは $p = \infty$ とする．$\mathbb{R}^1$ 上では p-ノルム達は全て同一であることを示せ．

問 3.9 と同様のことは $\mathbb{C}^n$ と，$\mathbb{C}^n$ 上の p-ノルムについても成り立つが，やや煩雑になるので省略する．

問 3.10. $a, b \geq 0$ とする．また，$p \geq 1$ とし，$f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x^{p-1}$ により定める．

1) f のグラフと x-軸及び直線 $x = a$ により囲まれる有界な図形の面積を a と p を用いて表せ．
   ※ 図形が一点からなる場合もある．
2) $q = \dfrac{p}{p-1}$ と置く．f のグラフと y-軸及び直線 $y = b$ により囲まれる有界な図形の面積を b と q を用いて表せ．

3) （ヤング（Young）の不等式）．$p, q \geq 1,\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ の時 $ab \leq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$ が成り立つことを示せ．また，等号が成り立つための a, b, p, q に関する（必要十分）条件を求めよ．

問 3.11. $v = {}^t(v_1\ \cdots\ v_n),\ w = {}^t(w_1\ \cdots\ w_n) \in \mathbb{C}^n$ とし，$p, q \geq 1,\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ あるいは（形式的に）$p = 1,\ q = \infty$ とする．

1) （ヘルダー（Hölder）の不等式）．$\left|\sum_{i=1}^n v_i w_i\right| \leq \|v\|_p \|w\|_q$ が成り立つことを示せ．

ヒント：$v = 0$ あるいは $w = 0$ である場合には容易である．$v, w \neq 0$ であるときには $\dfrac{|v_i|}{\|v\|_p}$ と $\dfrac{|w_i|}{\|w\|_q}$ にヤングの不等式を適用してみよ．$q = \infty$ の時には別に処理する必要がある．

2) （ミンコフスキー（$\overset{\text{Minkovski}}{\text{Минковски}}$）の不等式）．$\|v + w\|_p \leq \|v\|_p + \|w\|_p$ が成り立つことを示せ．

ヒント：$v + w = 0$ の時には容易である．$v + w \neq 0$ の時には $\|v + w\|_p^p$ を $|v_i + w_i|$ と $|v_i + w_i|^{p-1}$ の積の和として表してヘルダーの不等式を適用する．$q = \infty$ の時には別に処理する必要がある．

p-ノルム達には次のような関係がある．

問 3.12. $p, q \geq 1$ あるいは p, q の一方を ∞ とすると，ある $C_{p,q} \in \mathbb{R},\ C_{p,q} > 0$ が存在して，任意の $v \in \mathbb{R}^n$ について $\dfrac{1}{C_{p,q}} \|v\|_q \leq \|v\|_p \leq C_{p,q} \|v\|_q$ が成り立つことを示せ．

問 3.12 のような関係にあるノルムを**同値なノルム**と呼ぶ．つまり，p-ノルム達は同値である．

問 3.13. $\|\cdot\|,\ \|\cdot\|'$ を $\mathbb{R}^n$ 上の（p-ノルムとは限らない）ノルムとする．

1) $n = 1$ であれば $x \in \mathbb{R}$ について $\|x\| = |x|$ が成り立つことを示せ．

2) $n > 1$ とする．$S^{n-1} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\|_2 = 1\}$ と置く．$v \in S^{n-1}$ について，$f(v) = \dfrac{\|v\|}{\|v\|'}$ と定めることができて（注 3.16 も参照のこと），連続であることを示せ．

ヒント：定義さえできてしまえば，分子と分母がそれぞれ連続であることを示せばよい（なぜか？）．

3) $\|\cdot\|$ と $\|\cdot\|'$ は同値であることを示せ．

$\mathbb{C}^n$ 上のノルムについても同様のことが示せる．

$r>0$ とし，$B(r)_p=\{x\in\mathbb{C}^n \mid \|x\|<r\}$ と置く．$B(r)_p$ は，ベクトルの長さを p-ノルムで測ることにしたときの半径 r の開球である．問 3.12 により $B\left(\dfrac{r}{C_{p,q}}\right)_q\subset B(r)_p\subset B(C_{p,q}r)_q$ が成り立つ[†5].

定義. $\mathbb{R}^2$ の部分集合 S^1 を $S^1=\{{}^t(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \exists\theta\in\mathbb{R}\ \text{s.t.}\ {}^t(x,y)={}^t(\cos 2\pi\theta,\sin 2\pi\theta)\}$ により定め，**単位円周**と呼ぶ．ただし，S^1 でより一般の円周（例えば $\mathbb{R}^3$ 内の，$\{{}^t(x,y,z)\in\mathbb{R}^2 \mid \exists\theta\in\mathbb{R}\ \text{s.t.}\ {}^t(x,y,z)={}^t(\cos 2\pi\theta,\sin 2\pi\theta,0)\}$ で与えられる図形など）を表すこともある．

問 3.14. $F\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は連続であるとし，条件 $\forall x\in\mathbb{R},\ k\in\mathbb{Z},\ F(x+k)=F(x)+k$ をみたすとする．${}^t(x,y)\in S^1$ であるとき，${}^t(x,y)={}^t(\cos 2\pi\theta,\sin 2\pi\theta)$ と表して

$$f(x,y)={}^t(\cos F(\theta),\sin F(\theta))\in S^1 \tag{3.15}$$

と置く．

1) f はきちんと定まっていることを示せ．つまり,（上のような θ の選び方は複数あるが）$f(x,y)$ の値は θ の選び方に依らず定まることを示せ（注 3.16 も参照のこと）.
2) f を S^1 から $\mathbb{R}^2$ への写像とみなすと連続であることを示せ.

注 3.16. 問 3.13 の 2) の f や，問 3.14 の f の定義には，それぞれ一見きちんと定まっているか問題がある（前者は分母が 0 になっているかもしれないし，後者は θ の選び方に依るかもしれない）が，実際には問題がなく定義できている．このような状況を（日本語の文章であっても）「（f は）well-defined である」と言う．

問 3.17 (問 3.14 の続き). $f\colon S^1\to S^1$ を連続な全単射とする（このとき f の逆写像も連続であることが示される）．また，f は S^1 の「向き」を保つとする（ここでは $p\in S^1$ が左回りに動くとき，$f(p)$ もそうである，と考えればよい）．すると，問 3.14 にあるような連続写像 F が存在し，f は (3.15) のように表されることが知られている．F は一意的ではないので，一つ選んで固定する．以下では $F^0(x)=x$，$F^{n+1}(x)=F(F^n(x))$ とする．

1) $x\in\mathbb{R}$ とする．$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{F^n(x)}{n}$ が存在することと，$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{F^n(x)-x}{n}$ が存在することは同値であることを示せ．また，これらが存在するのであれば等しいことを示せ.
2) $x\in\mathbb{R}$ とし，$k\in\mathbb{N}^+$ について，$G_n\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $G_n(x)=F^n(x)-x$ により定める．$k\in\mathbb{Z}$ について $G_n(x+k)=G_n(x)$ が成り立つことを示せ.

[†5] このことからベクトルの長さをどの p-ノルムで測っても $\mathbb{R}^n$ や $\mathbb{C}^n$ の開集合という概念が変わらないことが分かる．講義の本論からは外れるのでこの脚注に関しては気にしなくて良い.

3) $G_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は一様連続であることを示せ．また，最大値と最小値が存在することを示せ（ヒント：G_n は $[0,1]$ 上の連続函数のように扱うことができる）.

4) F^n は狭義単調増加であることを示せ．また，$x_2 < x_1 < x_2 + 1$ とすると $G_n(x_2) - G_n(x_1) < 1$ が成り立つことを示せ.

5) $a_n = \max_{x\in\mathbb{R}} G_n(x)$，$b_n = \min_{x\in\mathbb{R}} G_n(x)$ とすると $a_n - b_n < 1$ が成り立つことを示せ.
ヒント：4) の後半の式で x_1，x_2 に関して最大，最小を適当に（適切に）取れば示せるが，迂闊に処理をすると不等号が「$\leq$」となってしまうので注意せよ.

6) $x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}^+$ とすると $F^{kn}(x) = F^{(k-1)n}(x) + G_n(F^{(k-1)n}(x))$ が成り立つことを示せ．また，$b_n \leq F^{kn}(x) - F^{(k-1)n}(x) \leq a_n$ が成り立つことを示せ.

7) $x \in \mathbb{R},\ m \in \mathbb{N}^+$ とすると $mb_n \leq F^{mn}(x) - x \leq ma_n$ が成り立つことを示せ.

8) 上の式で m を 1 とすれば $b_n \leq F^n(x) - x \leq a_n$ を得る．このことに注意して，x のみに依存する正の実数 C と，正の整数 N が存在して $m, n \geq N \Rightarrow \left| \frac{G_{mn}(x)}{mn} - \frac{G_n(x)}{n} \right| < \frac{C}{n}$ が成り立つことを示せ.

9) $x \in \mathbb{R}$ を固定する．このとき $\left\{ \frac{G^n(x)}{n} \right\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ はコーシー列であることを示せ．従って $\left\{ \frac{G^n(x)}{n} \right\}$ は $n \to +\infty$ の時収束するので極限を $\rho(x)$ とする.

10) $x, y \in \mathbb{R},\ x < y$ とする．$\lim_{n\to+\infty} \frac{|F^n(x) - F^n(y)|}{n} = 0$ が成り立つことを示せ.

11) $\rho(x)$ は x に依らないことを示せ.

定義 3.18. 上のように定めた $\rho\,(= \rho(x))$ を f の**回転数**と呼ぶ．回転数は F の選び方に依るが，ρ を 1 で割った余り $\rho \mod \mathbb{Z}$ は F の選び方に依らない．後者を f の回転数と呼ぶことも多い.

問 3.19. $\mathbb{R}^2$ をガウス平面と考えて $\mathbb{C}$ とみなし，$S^1 \subset \mathbb{C}$ と考える.

1) $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ であることを示せ.

2) $\theta \in \mathbb{R}$ とし，$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を $f(z) = e^{2\pi\sqrt{-1}\theta} z$ により定める．$z \in S^1$ であれば $f(z) \in S^1$ が成り立つことを示せ．また，f を S^1 から S^1 への写像とみなしたとき，f の回転数を求めよ（適当に F を固定してそのときの値を求めてもよいし，2π で割った余りを求めても良い）.

（以上）