２０１２年度数学 IA 演習　第１回

'12/4/17（火）４限
'12/4/17 一部訂正
'12/5/22 再修正
'12/6/19 再々修正（誤字の訂正）

**定義.** $\mathbb{R}$ で実数全体の成す集合を表す．また，$\mathbb{C}$ で複素数全体の成す集合を表す．

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \,\middle|\, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

と置き，$\mathbb{R}^n$ の元を **（実）ベクトル** と呼ぶ．$x$ が $\mathbb{R}^n$ の元であることを $x \in \mathbb{R}^n$ で表す．また，$\mathbb{C}^n$ も同様に定め，$\mathbb{C}^n$ の元を **（複素）ベクトル** と呼ぶ．

実数は複素数である．少し大げさに言えば，$x \in \mathbb{R} \Rightarrow x \in \mathbb{C}$ が成り立つ．一般に，$X, Y$ を集合であるときに，$x \in X \Rightarrow x \in Y$ が成り立つことを $X \subset Y$ で表す．このことを $X$ **は** $Y$ **に含まれる**と言う．また，$X$ は $Y$ の部分集合であると言う．一方，同じことを，主客を転倒して $Y$ **は** $X$ **を含む**とも言う．このように考えるときには $Y \supset X$ と表す．$X \subset Y$ かつ $Y \subset X$（あるいは $X \supset Y$）が成り立つとき $X$ と $Y$ は**等しい**と言い，このことを $X = Y$ で表す．

**定義.** $U \subset \mathbb{R}^n$ とする．$f$ が $U$ 上の実数値（$\mathbb{R}$-値，$\mathbb{R}$ に値をとるなどとも言う）**函数**であるとは，$f$ は $U$ の元に対して実数（$\mathbb{R}$ の元）を与える対応であることを言う．つまり，$x \in U$ であれば $f(x) \in \mathbb{R}$ が定まることを言う．$\mathbb{R}^m$-値函数や $\mathbb{C}^m$-値函数なども同様に定める（上の $\mathbb{R}^n$ と混乱しないよう注意せよ）．$m > 1$ であるときにはこれらを**ベクトル値函数**とも呼ぶ．$m = 1$ であれば $\mathbb{R}^m$-値函数は実数値函数である．本当は $m = 1$ であってもベクトル値函数なことには変わりないが，あまりそのようには呼ばない．$\mathbb{C}$ や $\mathbb{C}^m$ についても同様である．

**定義.** $U \subset \mathbb{R}^n$ 上の $\mathbb{R}^m$ 値函数を $U$ から $\mathbb{R}^m$ への**写像**とも呼ぶ．

$U \subset \mathbb{R}^n$ とし，$f$ を $U$ 上の $\mathbb{R}^m$ 値函数とする．$x \in \mathbb{R}^n$ を $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ と表すことにすれば $f(x)$ は $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right)$ と表される．これだと見づらいので，この講義・演習では $f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ あるいは $f(x_1, \ldots, x_n)$ で表す．このようにすると $f(x)$ の値は $n$ 個の変数 $x_1, \ldots, x_n$ の値で決まると考えることができる．そこで $\mathbb{R}^n$ あるいはその部分集合上の函数を $n$ **変数函数**と呼ぶ．$n$ 変数函数を総称して**多変数函数**と呼ぶ．$\mathbb{C}^n$ についても同様である．$n = 1$ であるとき，多変数函数に対して，変数が一つであることを強調するために 1 **変数函数**と言うことがある．

**注意**．特に指示がなければ，黒板で発表するときには小問を一つの単位としてそれ以上分割しないこと．逆に，原則として大問を 2 問以上一度に解かないこと．

**問 1.1.** $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ により定める．$a \in \mathbb{R}$ を固定し，$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $g(t) = \begin{pmatrix} t \\ at \end{pmatrix}$ により定める．$f(g(t))$ は $\mathbb{R}$ の点（元）であるから，$t$ に $f(g(t))$ を与える対応（函数・写像）は $\mathbb{R}$ 上の $\mathbb{R}$-値函数（あるいは $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}^2$ への写像）である．これを $f \circ g$ で表すことにする．$f \circ g(t) = f(g(t))$ である．

1) $f \circ g(t)$ を計算せよ．また，$(f \circ g)'(t) = \dfrac{d(f \circ g)}{dt}(t)$ を求めよ．
2) $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を $h(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$ により定める．$f \circ h$ を，$t = 0$ の近くの様子に注意して調べよ．

**問 1.2.** $n \in \mathbb{Z},\ n > 1$ とする．$f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f_n(x) = \begin{cases} n^2x, & 0 \leq x < \frac{1}{n}, \\ 2n - n^2x, & \frac{1}{n} \leq x < \frac{2}{n}, \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$ により定める．

1) $f_n$ のグラフの概形を描け．また，$a_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$ と置き，$a_n$ と $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$ を求めよ．
2) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ により定める．$f$ を求め，グラフの概形を描け．また，$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$ を求めよ．

問 1.1 や 1.2 が示唆するように，極限を「限りなく近づく」だけで把握するのには無理がある．これをどうするかというのは講義の主題の一つである．一方，なぜ講義で扱うような定義に落ち着いたかという経緯については時間の関係で扱わない．興味があれば是非自習して欲しい．

$n$ を自然数（0 以上の整数）であるとき，$n!$ を次のように定める．まず $0! = 1$ とする．そして，$n!$ が定まっているとき，$(n+1)! = (n+1) \cdot n!$ とする．$n!$ を $n$ の**階乗**と呼ぶ．

**問 1.3.** $x \in \mathbb{R}$ とし，$f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots$ と置く（ちなみに $f(x) = e^x$（指数函数）である）．ここで，$x^0$ は形式的に常に 1 であると考える（$x = 0$ の時はこれはおかしいので，このように記号を用いるときには必ず断る必要がある[1]）．右辺は無限和であるから，意味を持つかどうか不明であるが，ここではおおらかに考えることにする（どのような和に関して，どのようなときに「おおらかに」考えて良いのかは後日扱う）．

1) $f'(x)$ は，$f$ があたかも多項式であるかのように項ごとに計算すればよい（これは $f$ の定義にある級数が，**コンパクト一様絶対収束**という，強烈に良い収束をすることによる．これについても後日扱う）．このことを踏まえて $f' = f$ が成り立つことを示せ．

[1]全く断らない文献もあるのも事実だが，これはいろいろ「分かっている」人向けの文章でない限りよろしくない．この講義・演習ではそのような省略は**一切許容しない**が，板書では口頭で済ますこともある．

2) $f(x) \times f(y)$ も，$f$ があたかも多項式であるかのように計算すればよい．このことを踏まえて $f(x) \times f(y) = f(x+y)$ が成り立つことを示せ．

3) $f$ を $x \in \mathbb{R}$ を変数とする函数とする．$a \in \mathbb{R}$ とする．函数 $f$ に関する方程式

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + a^2 f = 0,\ f(0) = 0,\ f'(0) = 1$$

の解は存在して，指数函数のように多項式のように扱えることが分かる（これについては時間があれば扱う）．このことを踏まえて $f(x)$ を $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の形に表せ．また，$e^{\sqrt{-1}x} = \cos x + \sqrt{-1}\sin x$ が成り立つことを認めて，$f$ を三角函数で表せ．

**問 1.4.** 実数を成分とする 2 行 2 列の行列全体の成す集合を $M_2(\mathbb{R})$ で表す．$A \in M_2(\mathbb{R})$ の時，$\exp A = E_2 + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^3 + \cdots$ と置く．ここで $E_2$ は単位行列である．問 1.2 の指数函数と同様に和が意味を持つかどうか問題であるが，ここではおおらかに考える．

1) $A, P \in M_2(\mathbb{R})$ とし，$P$ には逆行列 $P^{-1}$ が存在するとする．このとき，$\exp(P^{-1}AP) = P^{-1}(\exp A)P$ が成り立つことを示せ．

2) $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ とする．$AB = BA$ であれば $(\exp A)(\exp B) = (\exp B)(\exp A) = \exp(A+B)$ が成り立つことを示せ．

3) $AB \neq BA$ が成り立つような $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ であって，$(\exp A)(\exp B)$, $(\exp B)(\exp A)$, $\exp(A+B)$ のうちどの二つも一致しない物を一組挙げよ．

4) $A \in M_2(\mathbb{R})$ とする．$\exp A$ には逆行列が存在し，それは $\exp(-A)$ であることを示せ．
※ 一般に，ある行列に逆行列が存在するならばそれは一意的である．知らなければ証明を考えてみよ（数学 II で扱うと思う）．

5) $A \in M_2(\mathbb{R}),\ t \in \mathbb{R}$ とする．$g(t) = \exp tA$ と置くと，$\frac{dg}{dt}(t) = A(\exp tA) = (\exp tA)A$ が成り立つことを示せ．

exp は行列の指数函数（指数写像）と呼ばれ，例えば微分方程式を解くときなどに用いる．

**問 1.5.** 以下の条件は全て同値であることを示せ．ただし，ここでは $\epsilon, \delta, y$ は実数とし，$f$ は $\mathbb{R}$ 上の実数値函数とする．

1) $\forall \epsilon > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \exists \delta > 0$ s.t. $|y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \epsilon$. ここで,「s.t.」は「such that」の略で「〇〇 s.t. ××」は「××のような〇〇」という意味である[2]．書かなくても良いが，どのような性質を考えているのか明示するためによく用いる．

2) $\forall \epsilon > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \exists \delta > 0$ s.t. $|y - x| < 2\delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \epsilon$.

3) $\forall \epsilon > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \exists \delta > 0$ s.t. $|y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < 2\epsilon$.

4) $\forall \epsilon > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \exists \delta > 0$ s.t. $|y - x| < 2\delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < 2\epsilon$.

5) $\forall \epsilon > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \exists \delta > 0$ s.t. $|y - x| \leq \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \epsilon$.

6) $\forall \epsilon > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \exists \delta > 0$ s.t. $|y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq \epsilon$.

7) $\forall \epsilon > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \exists \delta > 0$ s.t. $|y - x| \leq \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq \epsilon$.

---

[2] 数学では日常的に用いるが，本当は英語としては正しくない．一方，フランス語では tel(le)(s) que で正しい．ちなみにラテン語でも正しい表現である．

**問 1.6.** $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(t) = 1 - \cos t$ により定める．

1) $t \in \mathbb{R}$ について，$|f(t)| \leq |t|$ が成り立つことを示せ．また，等号が成り立つための $t$ に関する必要十分条件を求めよ．
2) 問 1.5 の 1) で $x = 0,\ y = t$ とした場合にあたる主張 $\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ s.t. $|t| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(0)| < \epsilon$ が成り立つことを示せ．
3) 命題「$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ s.t. $|t| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(0)| < \epsilon$」の否定を論理式で表せ．
4) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ により定める（$f$ は 問 1.1 の函数である）．すると $\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ s.t. $\|{}^t(x,y)\| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - f(0)| < \epsilon$ は成り立たないことを示せ．ただし，$\|{}^t(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$ である．

**問 1.7.** $a, b \in \mathbb{R}$ とする．

1) $a = b$ であることと，$\forall \epsilon > 0,\ |a - b| < \epsilon$ が成り立つことは同値であることを示せ．
2) $a \leq b$ であることと，$\forall \epsilon > 0,\ a < b + \epsilon$ が成り立つことは同値であることを示せ．また，$a \geq b$ であることと，$\forall \epsilon > 0,\ a > b - \epsilon$ が成り立つことは同値であることを示せ．
3) $a \leq b$ であることと，$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ s.t. $a + \delta < b + \epsilon$ が成り立つことは同値であることを示せ．また，$a \geq b$ である場合に類似の命題を定式化して（具体的に書き下して）それを示せ．

**問 1.8.** $\epsilon, \delta, y$ は実数とし，$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x^3 + x$ により定める．問 1.5 の 1) にある命題

$$\forall \epsilon > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \exists \delta > 0 \text{ s.t. } |y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \epsilon$$

について，以下の作業を行え．

1) 成り立つのであれば証明し，成り立たないのであれば成り立たないことを示せ．
2) 否定を論理式で表せ．また，成り立つ（あるいは成り立たない）のであればそのことを証明せよ．
3) 対偶を論理式で表せ．また，成り立つ（あるいは成り立たない）のであればそのことを証明せよ．
4) 逆を論理式で表せ．また，成り立つ（あるいは成り立たない）のであればそのことを証明せよ．

（以上）