

以下では特に断らなければ K で \mathbb{R} あるいは \mathbb{C} を表す.

問 7.1. 線型空間 V と, V の元 v_1, \dots, v_r (r は問により異なる) を以下のように定めるとき, v_1, \dots, v_r が K 上線型独立であるか調べ, それらが生成する V の部分線型空間を求めよ.

$$1) V = K^3, v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$2) V = K^3, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$3) V = K^4, v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$4) K = \mathbb{C}, V = \mathbb{C}^4,$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{-1} \\ 0 \\ \sqrt{-1} \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4') 4) のベクトルは \mathbb{R} 上一次独立か調べよ.

・以下では $K = \mathbb{R}$ とする.

5) $V = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ は } C^\infty \text{ 級}\}$, $v_0 = 1, v_1 = t, v_2 = t^2, \dots, v_n = t^n$. ここで 1 は常に値が 1 であるような定数関数を表す. また t を実変数とする.

6) $V = \mathbb{R}[t]$, $v_0 = 1, v_1 = t, v_2 = t^2, \dots, v_n = t^n$. ここで 1 で多項式としての 1 を表す.

問 7.2. $\mathbb{R}[x]$ は有限次元 \mathbb{R} -線型空間では無いことを示せ.

問 7.3. $V = \left\{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ は } C^\infty \text{ 級であって } \frac{df}{dt} = \lambda f \text{ を満たす} \right\}$ とする. ここで t は函数の変数であって $\lambda \in \mathbb{R}$ である. このとき V の \mathbb{R} 上の基底を求めよ. 必要であれば $\frac{df}{dt} = \lambda f$ の一般解は $f(t) = ce^{\lambda t}$, $c \in \mathbb{R}$ で与えられることを用いてよい.

問 7.4. $V = \left\{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ は } C^\infty \text{ 級であって } \frac{d^2f}{dt^2} = -f \text{ を満たす} \right\}$ とする. ここで t は函数の変数である.

1) V の \mathbb{R} 上の基底を求めよ. 必要であれば $\frac{d^2f}{dt^2} = -f$ の一般解は $f(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ で与えられることを用いてよい.

2) 変数は実数のままで, 函数の値としては複素数を許すことにする. つまり $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ とする. このとき $f_1(t) = e^{\sqrt{-1}t}$, $f_2(t) = e^{-\sqrt{-1}t}$ とすると $\{f_1, f_2\}$ は V の \mathbb{C} 上の

基底であることを示せ．必要であれば $e^{\sqrt{-1}t} = \cos t + \sqrt{-1} \sin t$ であること及び $\frac{d^2 f}{dt^2} = -f$ の一般解は $f(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ で与えられることを用いてよい．

問 7.5. V, W を K -線型空間, $f: V \rightarrow W$ を K -線型写像とする．

- 1) $v_1, \dots, v_r \in V$ について $f(v_1), \dots, f(v_r) \in W$ が線型独立であるとする．このとき v_1, \dots, v_r は線型独立であることを示せ．
- 2) $v_1, \dots, v_r \in V$ が線型独立であるとする． f が単射であれば $f(v_1), \dots, f(v_r) \in W$ は線型独立であることを示せ．
- 3) 主張「 $v_1, \dots, v_r \in V$ が線型独立であれば $f(v_1), \dots, f(v_r) \in W$ は線型独立である」は f が単射でない時には必ずしも正しくない．そのような例（反例）を挙げよ．
- 4) $v_1, \dots, v_r \in V$ が V を生成するならば, $f(v_1), \dots, f(v_r)$ は $\text{Im } f$ を生成することを示せ．
- 5) $v_1, \dots, v_r \in V$ が線型独立であるならば, v_1, \dots, v_{r-1} は線型独立であることを示せ．
- 6) $v_1, \dots, v_r \in V$ が V を生成するならば, 任意の $v \in V$ について v_1, \dots, v_r, v は V を生成することを示せ．

問 7.6. $v_1, v_2, \dots, v_k \in \mathbb{C}^n$ とする．

- 1) v_1, v_2, \dots, v_k が \mathbb{C} 上線型独立であれば v_1, v_2, \dots, v_k は \mathbb{R} 上線型独立であることを示せ．
- 2) v_1, v_2, \dots, v_k が \mathbb{R} 上線型独立であるとする．さらに全ての v_i は \mathbb{R}^n に属する, つまり全ての成分が実数であるとする．このとき v_1, v_2, \dots, v_k は \mathbb{C} 上線型独立であることを示せ．

ヒント: $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}$, $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k = 0$ と仮定する (示したいことは $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$ である)．この式を実部と虚部に分けてみよ．

- 3) v_1, v_2, \dots, v_k が \mathbb{R} 上線型独立であるが \mathbb{C} 上線型独立でないような例を挙げよ．
- 4) \mathbb{C}^n の \mathbb{R} 上の次元を求めよ．

問 7.7. \mathbb{R}^5 の部分線型空間 W_1, W_2 を

$$W_1 = \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 - x_5 = 0 \end{array} \right. \text{の解空間}$$

$$= \left\{ \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} \right) \in \mathbb{R}^5 \mid \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 - x_5 = 0 \end{array} \right\},$$

$$W_2 = \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 + 6x_5 = 0 \end{array} \right. \text{の解空間}$$

により定める．

- 1) $W_1 + W_2$ を式で表し, その次元と基底のひとつを求めよ.
- 2) $W_1 \cap W_2$ を式で表し, その次元と基底のひとつを求めよ.

問 7.8. $V = \{ \text{数列 } \{a_i\}_{i \in \mathbb{N}} \mid a_i \in K \}$ とする.

- 1) $a = \{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}, b = \{b_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in V$ と $\lambda \in K$ に対して $a + b$ (という名前の数列) を

$$(a + b)_n = a_n + b_n$$

により定め, λa (という名前の数列) を

$$(\lambda a)_n = \lambda a_n$$

により定める. この演算に関して V は K -線型空間であることを示せ.

- 2) $W = \{ \{a_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in V \mid a_{i+2} - 5a_{i+1} + 6a_i = 0 \}$ とする. W は V の部分線形空間であることを示せ.
- 3) W は有限次元であることを示せ. また基底を具体的に一組与えよ.
- 4) V は有限次元ではないことを示せ.

定義. $X, Y \in M_n(K)$ について $[X, Y] = XY - YX$ と置き, X, Y の交換子 (commutator), Lie 括弧積 (Lie bracket, Lie product) などと呼ぶ.

問 7.9. W を $M_n(K)$ の部分線型空間とし, $V = \{ X \in M_n(K) \mid \forall Y \in W, [X, Y] = 0 \}$ と置く.

- 1) V は $M_n(K)$ の部分線型空間であることを示せ.
- 2) $W = M_n(K)$ の時, V を求めよ.
- 3) $n \geq 2$ とする. $W = \mathfrak{so}_n(K) = \{ X \in M_n(K) \mid X + {}^t X = O_n \}$ の時, V を求めよ.
ヒント: $n = 2$ の時とそれ以外で結果は大分異なる. なお, $\mathfrak{so}_n(\mathbb{R})$ をしばしば \mathfrak{so}_n で表す.

問 7.10. $n \geq 2$ とし, $\mathfrak{so}_n(K) = \{ X \in M_n(K) \mid X + {}^t X = O_n \}$ と置く.

- 1) $\mathfrak{so}_n(K)$ は $M_n(K)$ の部分線型空間であることを示せ.
- 2) $\mathfrak{so}_n(K)$ の基底を一組求めよ. また, 次元を求めよ.
- 3) $M_n(K)$ の基底であって, 2) で求めた基底の拡大 (延長) となっているものを一組求めよ.
- 4) $V_1 = \{ X \in M_n(K) \mid X = {}^t X \}$ と置くと V_1 は $\mathfrak{so}_n(K)$ の $M_n(K)$ における補空間であることを示せ.
- 5) $V_2 = \{ X \in M_n(K) \mid X \text{ は上三角行列} \}$ と置くと V_2 は $\mathfrak{so}_n(K)$ の $M_n(K)$ における補空間であることを示せ.

問 7.11 (一次方程式のまとめ). $A \in M_{m,n}(K)$ とし, $v \in K^n$ に関する方程式 $w = Av$ を考える. ここで $w \in K^m$ である. K^n の部分集合 V_w を $V_w = \{v \in K^n \mid Av = w\}$ により定める. また, $f: K^n \rightarrow K^m$ を $f(v) = Av$ により定め, $W = \text{Im } f$ と置く.

- 1) V_w が K^n の部分線型空間であるのは $w = 0$ の時, その時のみであることを示せ.
- 2) $u \neq w$ であれば $V_w \cap V_u = \emptyset$ が成り立つことを示せ.
- 3) $K^n = \bigcup_{w \in W} V_w$ が成り立つことを示せ. 2) と 3) により K^n は $V_w (w \in W)$ の形の集合に分割されることがわかる.
- 4) $V' = \{V_w \mid w \in K^m, V_w \neq \emptyset\}$ と置く. V' は空でないような V_w を全て集めた集合である. $V_w \in V'$ であることと, $w \in W$ が成り立つことは同値であることを示せ.
- 5) V' の元としての V_w を $[V_w]$ で表すこととし,
 - (a) $[V_w], [V_u] \in V'$ の時 $[V_w] + [V_u] = [V_{w+u}]$ (和空間と紛らわしいが異なる.)
 - (b) $[V_w] \in V', \lambda \in K$ の時 $\lambda[V_w] = [V_{\lambda w}]$
 と定める. すると V' は K -線型空間であることを示せ. また, V' の零ベクトルは $[V_0]$ であることを示せ. ここで 0 は K^m の零ベクトルである.
- 6) $h: V' \rightarrow K^m$ を $h([V_w]) = w$ により定める. すると h は V' から W への線型同型写像であることを示せ.
- 7) $v \in V_w$ とする. $v' \in V_w$ と $A(v - v') = 0$ は同値であることを示せ.
- 8) $g: K^n \rightarrow V'$ を $g(v) = [V_{Av}]$ により定める. すると g は全射線型写像であることを示せ.
- 9) $\text{Ker } g = V_0$ であることを示せ.
- 10) $h \circ g = f$ が成り立つことを示せ.

V' は K^n の部分集合を集めたものであり, 一方, $W = \text{Im } f$ は K^m の部分集合であるから, V' と W は同一ではありえない. 6) はこのような互いに異なる二つの線型空間が h により自然に同型であることを示している (w に飾りをいろいろつけて $[V_w]$ と表していると考えれば, V' が W と同型なのは当たり前といえれば当たり前である). また, 10) は g と h により f (つまり A をかけるという線型写像) が自然に二段階に分解されることを示している. 講義で一次方程式に関連して現れる線型空間の次元に関するいくつかの事実を示したが, それらも上に示した同型を用いて理解することができる. 各自考えてみよ. また, 商線型空間の定義を知っている者は g が K^n/V_0 から V' への線型同型写像を誘導することも示してみよ.

(以上)