２００９年度数学II演習 (理I向け)　第2回　　　　　　　　　　　　　　　　　'09/4/28（火）４限
'09/5/7（木）４限

問 2.1. L を $\mathbb{R}^2$ 内の，原点を通る直線とする．実数 a_1, a_2, v_1, v_2 を用いて

$$\begin{aligned} L &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \ a_1x_1 + a_2x_2 = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \ \exists t \in \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

と二通りに L を表した時，$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ の間の関係を求めよ．

$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ はそれぞれ L の法線ベクトル，方向ベクトルと呼ばれるのであった．

問 2.2. P を $\mathbb{R}^3$ 内の，原点を通る平面とする．実数 a_1, a_2, a_3 を用いて

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \ a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \right\}$$

と表す．$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ は L の法線ベクトルと呼ばれる．

1) $v, w \in P$ とする．任意の実数 t, s について $tv + sw \in P$ が成り立つことを示せ．
2) $v, w \in P$ とする．任意の $u \in P$ について，$u = tv + sw$ と実数 t, s を用いてただ一通りに表すことができることと，$tv + sw = 0$（零ベクトル）であれば $t = s = 0$（こちらの 0 は数）が成り立つことは同値であることを示せ．
3) $v, w \in P$ とする．任意の $u \in P$ について，$u = tv + sw$ と実数 t, s を用いて表すことができるとする．この時，このような表し方は一通りであることを示せ（これは P が「2 次元」であることに因る）．

2) あるいは 3) の条件が成り立つ時

$$\begin{aligned} P &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \ a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \ \exists t, s \in \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

が成り立っている．

以下では $\langle\cdot|\cdot\rangle$ で $\mathbb{R}^3$ の内積（標準内積）を表す．例えば，$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ と置けば上で定めた P について $P = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid \langle a \,|\, u\rangle = 0\}$ が成り立つ．

問 2.3. $\mathbb{R}^3$ 内の図形（$\mathbb{R}^3$ の部分集合）L を次のように定める．まず $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^3$ とする．そして

$$a_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{pmatrix}$$

と成分で表して

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \end{array} \right\}$$

と置く．

1) $L = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid \langle a_1 \,|\, u\rangle = \langle a_2 \,|\, u\rangle = 0\}$ が成り立つことを確かめよ．

2) a_1, a_2 は問 2.2 の 2) あるいは 3) の条件を充たすとする．このとき，適当に $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ を定めれば

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \,\middle|\, \exists t \in \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right\}$$

が成り立つことを示せ．

3) （大雑把に言えば 2) の逆）$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ とし，$v \neq 0$ とする．L を 2) のように定めれば，適当な $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^3$ が存在して

$$L = \big\{u \in \mathbb{R}^3 \mid \langle a_1 \,|\, u\rangle = \langle a_2 \,|\, u\rangle = 0\big\}$$

が成り立ち，さらに，この a_1, a_2 は問 2.2 の 2) あるいは 3) の条件を充たすことを示せ．

4) $\mathbb{R}^2$ 内の直線に関して 2) と 3) に対応する事実は何か考えよ（問 2.1 も参照のこと）．

問 2.4. $\theta, \phi \in \mathbb{R}$ とする．T_θ で，$\mathbb{R}^3$ の y-軸を軸とする θ-回転，S_ϕ で，$\mathbb{R}^3$ の z-軸を軸とする ϕ-回転をそれぞれ表す．なお，ここで回転の方向は軸を自分に向かって垂直に立てた時の反時計回りの方向を正の方向と定める（いわゆる右ねじの方向）．従って xyz-空間において z-軸を軸とする回転であれば，x 軸から y 軸へ向かう向きの回転が正の回転である．

1) $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ の時，$T_\theta(x)$ と $S_\phi(x)$ の成分を x_1, x_2, x_3 を用いて表せ．

2) $x \in \mathbb{R}^3$ に対して $f(x) = S_\phi(T_\theta(x))$ と置く（以下の問においても同様）．$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ と成分で表した時，$f(x)$ の成分を求めよ．

3) $v, w \in \mathbb{R}^3$ の時 $\langle T_\theta(v) \,|\, T_\theta(w) \rangle = \langle v \,|\, w \rangle$ が成り立つことを示せ．

4) $v, w \in \mathbb{R}^3$ の時 $\langle f(v) \,|\, f(w) \rangle = \langle v \,|\, w \rangle$ が成り立つことを示せ．

5) $a \in \mathbb{R}^3$，$a \neq 0$ とする．$P = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle a \,|\, x \rangle = 0\}$ を $\mathbb{R}^3$ 内の平面とし

$$f(P) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists y \in P,\ x = f(y) \right\}$$

と置く．$f(P)$ は P の f による像と呼ばれる．$f(P)$ は平面であることを示せ．

6) $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ とし，P を 5) と同様に定める．また，

$$P_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_3 = 0 \right\}$$

と置く．このとき，適当な θ，ϕ が存在して $P = f(P_0)$ が成り立つことを示せ．また，このような θ，ϕ について $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を求めよ．

ヒント：例えば P_0 と P の法線ベクトルに着目し，5) を用いて示すことができる．

問 2.5. 1) $A \in M_n(\mathbb{C})$, $B \in M_n(\mathbb{C})$ の時, AB の実部・虚部をそれぞれ A, B の実部・虚部を用いて表せ.

2) $A \in M_n(\mathbb{R})$ が複素行列として逆行列を持てば（つまり, $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ であれば）, その逆行列は実行列であることを示せ（従って $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ である）.

ヒント：$B \in M_n(\mathbb{C})$ を A の複素行列としての逆行列として，$AB = BA = E_n$ の実部・虚部を考えてみよ.

問 2.6. 行列 A が

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pq} \end{pmatrix}$$

と区分けされているとき，${}^tA$ を A_{ij} を用いて表せ.

（以上）