

問 1.1. 1) $z \in \mathbb{C}$ とする. $z\bar{z}$ は実数であって, 更に $z\bar{z} \geq 0$ が成り立つことを示せ. また, 等号が成り立つことと $z = 0$ であることは同値であることを示せ.

2) $z, w \in \mathbb{C}$ のとき, $|zw| = |z||w|$ が成り立つことを示せ.

3) $z, w \in \mathbb{C}$ について $|z+w| \leq |z| + |w|$ が成り立つことを示せ.

4) $t \in \mathbb{R}$ であれば, $t \in \mathbb{C}$ とみなして $|t| = \sqrt{tt}$ と置くと $|t|$ は t を実数と見た時の絶対値と一致することを示せ ($\sqrt{z\bar{z}}$ を z の絶対値と呼ぶのはこのことも踏まえている.)

問 1.2. $z \in \mathbb{C}$ のとき $\operatorname{re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}$, $\operatorname{im} z = \frac{z - \bar{z}}{2\sqrt{-1}}$ がそれぞれ成り立つことを示せ.

定義 1.3 (指数函数). $z \in \mathbb{C}$ の時

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

と定める. ただし, ここでは $\frac{z^0}{0!} = 1$ とする.

本当は級数が収束することを示さないと上の定義は意味をなさないが, これは数学Iで扱うことになっているのでここでは収束は認める. さらに次の定理も認めることにする.

定理 1.4. 1) $x \in \mathbb{R}$ の時 $e^{\sqrt{-1}x} = \cos x + \sqrt{-1} \sin x$ が成り立つ.

2) $z, w \in \mathbb{C}$ の時 $e^{z+w} = e^z e^w$ が成り立つ (指数法則)

問 1.5. $z, w \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, $w \neq 0$ とする.

1) $\arg zw - (\arg z + \arg w)$ は 2π の整数倍であることを示せ.

2) $0 < \arg z < \pi$, $0 < \arg w < \pi$ であるとする. このとき, 複素平面 (複素数平面, ガウス平面) における $0, 1, z$ を頂点とする三角形と, $0, w, zw$ を頂点とする三角形は相似であることを示せ. また, 相似比を求めよ.

注. 1) の事実を $\arg zw = \arg z + \arg w$ が $2\pi\mathbb{Z}$ の任意性を除いて成り立つという.

問 1.6. $z \in \mathbb{C}$ とする.

1) $|e^z| = e^{\operatorname{re} z}$ が成り立つことを示せ. また, 常に $e^z \neq 0$ が成り立つことを示せ.

2) $n \in \mathbb{Z}$ であれば $e^{z+2\pi\sqrt{-1}n} = e^z$ が成り立つことを示せ.

3) $(e^z)^{-1} = e^{-z}$ であることを示せ.

注意: 左辺は e^z の乗法に関する逆元である.

問 1.7. $z \in \mathbb{C}$ とする. $f_z: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ と $g_z: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$f_z(x) = \begin{pmatrix} \operatorname{re} z(x_1 + \sqrt{-1}x_2) \\ \operatorname{im} z(x_1 + \sqrt{-1}x_2) \end{pmatrix}, \quad g_z(x) = \begin{pmatrix} \operatorname{re} \bar{z}(x_1 + \sqrt{-1}x_2) \\ \operatorname{im} \bar{z}(x_1 + \sqrt{-1}x_2) \end{pmatrix}$$

と置くことにより定める. ここで $z(x_1 + \sqrt{-1}x_2)$, $\bar{z}(x_1 + \sqrt{-1}x_2)$ は複素数としての積である.

- 1) $A_z \in M_2(\mathbb{R})$ であって, 任意の $x \in \mathbb{R}^2$ について $f_z(x) = A_z x$ が成り立つようなものがただ一つ存在する. A_z を z を用いて表せ. ここで $M_2(\mathbb{R})$ は実数を成分とする 2 行 2 列の行列全体のなす集合である.
- 2) $z \neq 0$ であれば 1) で得られる行列 A_z は逆行列を持ち, しかもある $w \in \mathbb{C}$ について $(A_z)^{-1} = A_w$ が成り立つことを示せ.
- 3) $M_2(\mathbb{R})$ の元であって, 1) のようにして得ることができるものを全て挙げよ.
- 4) f_z を g_z に置き換えて 1) から 3) に答えよ.

問 1.8. 問 1.7 で得られる写像 f_z は

- a) $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2, f_z(x_1 + x_2) = f_z(x_1) + f_z(x_2),$
- b) $\forall x \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, f_z(\lambda x) = \lambda f_z(x),$

という性質を持つことを示せ. また, g_z についてはどうか調べよ.

問 1.8 の二つの性質を持つ写像を線型写像という. 線型写像はこの講義・演習での主題の一つである.

問 1.9 (詳しいことは冬学期に扱う). $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ のとき, v と w の内積を $\langle v | w \rangle$ で表す. つまり, $\langle v | w \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$ とする. 内積はいくつかの性質をもつが, そのうち

(*) $\langle v | v \rangle \geq 0$ であって, 等号は $v = 0$ の時, その時のみ成り立つ

という性質に着目し, $v, w \in \mathbb{C}^2$ に対しても同様の性質を持つような操作を考えてみる.

- 1) 単純に \mathbb{R}^2 の時と同様に $\langle v | w \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$ とするとこれは性質 (*) を持たないことを示せ.
- 2) $\langle v | w \rangle = \bar{x}_1 y_1 + \bar{x}_2 y_2$ とするとこれは性質 (*) を持つことを示せ.
- 以下では $\langle v | w \rangle$ は 2) のものを用いる.
- 3) $v \in \mathbb{C}^2$ に対して v の長さを $\|v\| = \sqrt{\langle v | v \rangle}$ として定める. $w \in \mathbb{R}^2$ のとき, $w \in \mathbb{C}^2$ とみなすと $\|w\|$ は通常の意味での w の長さとも一致することを示せ.
- 4) $v \in \mathbb{C}^2, \lambda \in \mathbb{C}$ について, $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$ が成り立つことを示せ.

問 1.10. 複素平面で以下の式が表す図形を図示せよ.

- 1) $|z - c| = r$, ただし $c, r \in \mathbb{C}$. (より正確には $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| = r\}$, $c, r \in \mathbb{C}$ のことである. 以下同様.)
- 2) $|z - 1| + |z + 1| = p, p > 0$. (不等号は実数に対してしか意味を持たないので, 例えば $p > 0$ のように不等号を用いた時には暗黙の内に $p \in \mathbb{R}$ を仮定する.)
- 3) $\left| \frac{z - 1}{z + 1} \right| = c, c \in \mathbb{R}$.
- 4) $|z - \sqrt{-1}| = (\operatorname{im} z) + 1$.

(以上)