２００７年度数学 II 演習（理 I）　　　　　　　　　　　’07/6/11（月）４限

問１． 次の行列の行列式を求めよ.

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$　　2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 6 & 12 \\ 1 & 2 & 5 & 10 \\ 1 & 2 & 4 & 9 \end{pmatrix}$　　4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$

問２． a_{ij} を (i,j) 成分とする n 次正方行列 A について，$\mathrm{tr}A = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}$ と定め，A のトレース（trace）あるいは跡と呼ぶ.

1) A を $(m \times n)$-行列, B を $(n \times m)$-行列とするとき，$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ であることを示せ.
2) A を 2 次正方行列とするとき，$\det A = 2(\mathrm{tr}A)^2$ となるための A の条件を求めよ.
3) A を（実数を成分とする）$(m \times n)$-行列とする．$\mathrm{tr}(A\,{}^tA) \geq 0$ であることを示せ．また，等号が成り立つような A を全て求めよ.

問３．[1]

1) A を実数を成分とする n 次正方行列とする．$A\,{}^tA = E_n$ が成り立てば $\det A = \pm 1$ であることを示せ.
2) A を複素数を成分とする n 次正方行列とする．$A\,{}^t\overline{A} = E_n$ が成り立てば $|\det A| = 1$ であることを示せ．ここで, $\overline{A}$ は $\overline{a_{ij}}$ を (i,j)-成分とする行列を表し，${}^t\overline{A}$ はその転置行列を表す．$\overline{A}$ を A の複素共役と呼ぶ．容易に分かるように ${}^t\overline{A} = {}^t(\overline{A})$ である.

※ 1) 2) いずれの場合にも A は正則な行列である.

問４． $A = (a_{ij})$ を $(m \times n)$ 行列, $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$ を $\mathbb{R}^m$ の元とする．$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ とし, $Av = c$ で表される $x_1, \cdots, x_n$ に関する連立一次方程式を考える.

1) 方程式が解を持つと仮定する．このとき $m < n$ であれば解は無限に存在することを示せ.
2) $m = n$ とする．任意の $c \in \mathbb{R}^n$ について方程式が解を持つための A の条件を求めよ.
3) $W = \{c \in \mathbb{R}^m \mid Av = c \text{ が解を持つ}\}$ とおく．$0 \in W$ なので W は空集合 $\emptyset$ ではない．$w_1, w_2 \in W$, $a, b \in \mathbb{R}$ とすると, $aw_1 + bw_1 \in W$ であることを示せ.

[1] ６月１２日一部改変

問 5 . $v_1, \cdots, v_n \in \mathbb{R}^m$ とし，v_i 達を並べて得られる $(m \times n)$ 行列を A とする：$A = (v_1 \ \cdots \ v_n)$．これにさらに $v_{n+1} \in \mathbb{R}^m$ を付け加えて $A' = (v_1 \ \cdots \ v_{n+1})$ とする．このとき，$\operatorname{rank} A \leq \operatorname{rank} A' \leq \operatorname{rank} A + 1$ であることを示せ.

問 6 . A を n 次正則行列とし, $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ として, 行列を用いて $Av = c$ と表される $x_1, \cdots, x_n$ に関する連立一次方程式を考える．この方程式は唯一の解 $v = A^{-1}c$ を持つ．これにさらに方程式

$$a_{n+1,1}x_1 + \cdots + a_{n+1,n}x_n = c_{n+1}$$

を付け加えても解が存在することと，$y_1, \cdots, y_n$ に関する連立一次方程式

$$\begin{pmatrix} {}^tA \\ {}^tc \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1,1} \\ \vdots \\ a_{n+1,n} \\ c_{n+1} \end{pmatrix}$$

が解を持つことは同値であることを示せ.

（以上）