２００６年度数学 II（社学）演習　　　　　　　　　'06/5/24（水）１時限

問１． 以下の行列のランク (rank) を求めよ．

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$　2) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$　3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

問２． A が $(m \times n)$-行列の時，$\operatorname{rank} A \leq \min\{m, n\}$ であることを示せ．ここで，$\min\{m, n\}$ で m, n のうち大きくない方の数を表す．

問３． 以下の行列の行列式を計算せよ．

1) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$　2) $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}$　3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$　4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$　6) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$　7) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

8) $\begin{pmatrix} E_r & O_{r,n-r} \\ O_{n-r,r} & O_{n-r,n-r} \end{pmatrix}$

問４． n 次正方行列 A について，A が正則（可逆）であることと，$\operatorname{rank} A = n$ であることは同値であることを示せ．
ヒント：A に適当に左右の基本変形を繰り返すと $\begin{pmatrix} E_r & O_{r,n-r} \\ O_{n-r,r} & O_{n-r,n-r} \end{pmatrix}$ の形に直せるが，一方で左右の基本変形は適当な行列 T, S をそれぞれ左，右からかけることに対応したのであった（ここまでは認めてよい）．このことと，B, C が n 次正方行列であれば $\det(BC) = (\det B)(\det C)$ であることをうまく組み合わせれば証明ができる．

（以上）