Serreの問題の反例に現れた$\mathbb{Z}$作用を持つ正則領域の注目すべき性質について

大沢健夫

2023 年 10 月 7 日

はじめに

タイトルにある通り、本稿の目的はある一つの特殊な領域が持つ特殊な性質の報告であるが、その意味するところは背景の説明なしには伝えにくいので、準備として問題の出所を振り返っておこう。

多変数複素解析学においては、関数や写像をそれらの解析性を保ったままで拡張する問題は様々な場面で現れ、重要である。解析接続によって写像の定義域が拡張されて生ずる複素多様体は任意ではありえず、局所擬凸性という、凸性に似た幾何学的な制約を受ける。ここから多変数関数論の基本的諸問題が生ずる。たとえばこの多様体が $\mathbb{C}^n$ 上の領域である場合には、局所擬凸性から大域的な擬凸性すなわち多重劣調和な皆既関数の存在が従い、その結果正則凸になる (岡の定理)。この事実に基礎づけられた解析的方法により、関数の分解や近似に関わる種々の大域的問題が、$\mathbb{C}^n$ 上の領域に対してだけでなく、より一般な擬凸多様体上で、あるときは完全に一般化された設定で、またある時は自然な幾何学的条件の下で、増大度や境界正則性の条件を付けて解かれてきた。これらの諸結果の多くは今日では Stein 多様体上の定理としてまとめられている。

Stein 多様体とは Stein[St] により 1951 年に導入された複素多様体のクラスであり、「正則凸性」と「正則分離性」によって特徴づけられる。Stein の論文は、正則領域上で Cousin の乗法的問題を解明した岡の第 3 論文 (岡の原理) を一般化しているが、Stein 多様体論そのものは大域的な座標の存在を踏まえた古典的な問題への自然なアプローチであり、Severi らの代数幾何の影響を受けた考え方であると言ってもよいだろう。岡の理論の複素多様体上への一般化は、まず H.Cartan によって岡の「不定域イデアル」を受けた形で、Stein 多様体上の基本定理としてまとめられた。その一つが解析的連接層のコホモロジー理論だが、これは $\mathbb{C}$ 上の分岐被覆面の高次元版にあたる Stein 空間まで一般化された (cf. [G-R])。その結果、解析関数論の基本的諸命題が Stein 空間上の定理として記述され、その基礎の上に、Riemann 面のモジュライ理論の一般化にあたる種々の変形理論が展開されたことは周知であろう。小平・Spencer による複素構造の変形理論や Grauert の順像

定理はその中でも特に重要な結果である。また、Serre による射影的代数多様体上の連接層の代数的理論や、それに続く Grothendieck による代数幾何の新しい基礎付けは、Stein 空間論の代数幾何への feedback と言えよう。

一方、岡の原理は Cartan や Grauert らによる一般化のあと、Stein 多様体上の正則写像論の中でさらに研究が深められた。開 Riemann 面が $\mathbb{C}$ 上の Riemann 領域であることや、$n \geq 2$ のとき n 次元 Stein 多様体が $\mathbb{C}^N(N = n + \left[\frac{n}{2}\right] + 1)$ に複素閉部分多様体として埋め込めることなどは有名な成果であるが、Stein 多様体上でこれらを基礎づけるより一般的なホモトピー原理を求めて、新たに岡多様体の理論が創出された。これは複素構造の変形の問題とも関連しながら進展中である。(cf. [Ftn])。

さて、このような正則凸性からの展開とは別に、Grauert は岡の定理が Levi 問題の解に基礎づけられていることに注目し、学位論文 [G-1] で擬凸性と完備な Kähler 計量の存在との関連性について初めて論じた。これは後に擬凸性の微分幾何的な意味をそれ自身として掘り下げた研究 [G-2] へと展開し、さらに Andreotti-Vesentini[A-V-1,2] や Hörmander[Hm] の L^2 理論、および Fefferman[Ff] による強擬凸領域上の Bergman 核の漸近展開の解析へとつながった。

L^2 理論は本来は偏微分方程式論における関数解析的方法であるが、複素解析、微分幾何、代数幾何への応用が広く、しかも解が精密な評価式つきで求められるところに大きな利点がある。この方法は小平 [Kd] による多様体の代数性の特徴づけや [Hm] における Bergman 予想の解決を起点として、Fefferman や平地 [Hi] らによる微分幾何的な調和解析と連動しながら進展を続けてきた。特に 2012 年の Błocki、Guan-Zhou による吹田予想の解決以降、L^2 正則関数の評価付き拡張と Bergman 核のパラメータ依存性の関係が明確になったことは特筆すべき成果であろう。ちなみに、後者は山口 [Y] による Riemann 面の解析族の Robin 定数の変分の解析が発端であり、それは西野 [Ni] が示した $\mathbb{C}$ の剛性のポテンシャル論的別証明であった。このように、関数論のポテンシャル論的特性は時代とともに形を変えながら伝わっている。

[G-2] で確立された強擬凸領域の正則凸性は一般の複素多様体上の Levi 問題の解であり、強擬凸領域上の連接層に対するコホモロジー有限性定理に基礎づけられている。これによるコンパクトな例外集合の特徴づけである「ブローダウンが可能 $\iff$ 強擬凸な基本近傍系が存在」は、解析空間の改変操作の理論において基本的である (cf. [G-3])。Grauert と Riemenschneider による消滅定理 [G-Rms-1,2] はそこからの展開の中で特筆すべき成果で、最近の乗数イデアルの理論にもつながるものである。なお、中野 [N] と藤木 [Fk] は Grauert らとは独立に、パラメータつきのブローダウン条件を研究し、より一般の擬凸多様体上の消滅定理を確立した。

このように、多変数関数論の展開とともに次第に一般の擬凸領域上で多様な現象が発見されるようになった。中でも、Grauert の「複素多様体上の注目すべき擬

凸領域」と題された論文 [G-4] は、本格的な弱擬凸領域論への出発点である。ここでは正則凸でない擬凸領域で強擬凸に近いものの例が与えられ、これにより境界が次元のある解析的集合を含む場合も詳しく研究されるようになった。$\mathbb{C}^2$ 内の領域に対してもこの方向で新境地が開かれ、特に Diederich と Fornaess[D-F] がワームと呼ばれる特異な弱擬凸領域を発見したことは複素境界値問題の研究を一層深める動機になった。その後、複素多様体上でも似た領域が発見されるなどしたことから (cf. [D-Oh-1])、徐々にではあるがこうした例への総合的かつ一般的な理解が進み (cf. [D-Oh-2])、弱擬凸領域は様々な視点から詳しく研究されるようになったのである。

弱擬凸領域上の Levi 問題からの１つの展開

複素多様体 M と正則ベクトル束 $E \to M$、および有界な局所擬凸領域 $\Omega \subset M$ に対し、Ω の E-凸性すなわち E の正則切断に関する凸性が正則凸性にならって Grauert[G-4] および Pinney[P] によって導入され、そうなるための幾何学的条件が、[P], [A] および最近の [Oh-2,4] によって与えられた[1]。

念のため、複素多様体 M の正則凸性は正則関数の集合 $\mathcal{O}(M)$ を使って

$$\forall \gamma \in M^{\mathbb{N}} \; s.t. \; \gamma(\mathbb{N}) \text{ は } M \text{ 内で非有界}, \; \exists f \in \mathcal{O}(M) \; s.t. \; f(\gamma(\mathbb{N})) \text{ は } \mathbb{C} \text{ 内で非有界}$$

と書けることを思い出しておこう。Ω の E-凸性はこれに準ずる形で正則切断の集合 $H^{0,0}(\Omega, E)$ によって

$$\forall \gamma \in \Omega^{\mathbb{N}} \; s.t. \; \gamma(\mathbb{N}) \text{ は非相対コンパクト}, \exists s \in H^{0,0}(\Omega, E) \; s.t. \; s(\gamma(\mathbb{N})) \text{ は } E|_{\overline{\Omega}} \text{内で非有界}$$

で定義される。

問題は、この意味での凸性が結論できるためには領域の境界条件とベクトル束の正値性がどれだけ必要かということだが、現状を一言でいうなら、擬凸多様体上では岡・Grauert 理論が自然に拡張されるのに対し、弱擬凸領域上でやってみると微妙な問題が表れ、そこが障害となってまだ満足すべき精密な結果が得られていないということになるだろう。例えばベクトル束係数の Bergman 核についても、境界挙動が最良と思われる形では示せていない (cf. [Oh-9])。

擬凸多様体への拡張が自明であったわけではなく、正直線束に関する凸性を小平の埋め込み定理の拡張として予想したのは中野 [N-2] であったが、それは高山 [T-2] が乗数イデアル層を解析することにより解決した。それに先だって得られたのが負の標準直線束を持つ擬凸多様体の正則凸性であった (cf.[T-1])。これは Levi 問題

[1] 他の話題との関連が [Oh-7] でサーベイされている。

の 1 つの解であり、Grauert による Stein 多様体の特徴づけの 1 つの拡張である一方、藤田 [F]、武内 [Tk]、上田 [U] らによる $\mathbb{P}^n$ や Grassmann 多様体上の Levi 問題の解を、さらに弱い曲率条件下で拡張したことになっている。よって岡理論の延長としても自然なものであろう。これはごく最近、[Oh-5] で標準直線束が無限遠で負であるような擬凸多様体の正則凸性へと拡張されたが、これは強擬凸性という Grauert 流の正則凸性条件の拡張でもある。

同様のことが局所擬凸領域上でどこまで成立するかを調べた結果、[T-1] のもう一つの拡張が [Oh-3,6] で得られたが、これは一定の曲率条件および境界正則性条件の下で、有界な局所擬凸領域が $\mathbb{C}^N$ の局所閉な解析集合の上へとプロパーに写像されるというものであり、正則凸性が完全に結論付けられるところまでは行かなかった。

ここで結論が正則凸性にまで届かなかったことに、かえって一つの新しい興味が生まれた。それは Serre の問題の反例の一つがこれに似た状況を呈していたからである。

Serre の問題とは Stein 多様体をファイバーとし Stein 多様体を底空間とするファイバー束が Stein かどうかを問う問題で、1953 年に Serre が出題して以来、ファイバーと構造群をさまざまな場合に限定しながら多くの肯定的結果が得られた。その中でも松島と森本の結果 [M-M] は有名で、Grassmann 多様体上の Levi 問題の解決に応用された (cf. [U])。1977 年に Skoda が $\mathbb{C}^2$ 束の場合に反例を構成し、その後は主に種々の反例の研究が続いたが、中には岡の原理が成立するなど Stein 的なものもある (cf. [R])。

さて、E-凸性の研究 [Oh-3,6] に関連する反例は $\mathbb{C}^2$ の有界領域をファイバーとするもので、Coeuré と Loeb[C-L] により発見された。このファイバーは 2 重円板を $\mathbb{Z}^2$ のある作用で約したもので、$|z_1|^{\lambda_1} < |z_2| < |z_1|^{\lambda_2}$ の形をした Reinhardt 領域である。一般に、ファイバーが有界正則領域であるときは全空間は正則分離性を持ち、さらにファイバーの 1 次元 Betti 数が 0 である場合には正則凸であることも知られている (cf. [S])。したがってこの例は特に珍しいものだったのだが、Colţoiu と Diederich が [C-D] で指摘したように、これは局所擬凸性による Stein 性の特徴づけが $\mathbb{C}^n$ 内の解析的な局所閉集合に対しては成立しないことを示す最初の例でもあった。

そこで [C-L] の例について調べた結果、まず次を示すことができた。

定理 1. $\mathbb{C}^2$ の有界正則領域 F と $\sigma \in AutF$ で次を満たすものが存在する。

1) σ は固定点を持たず、$AutF$ の真性不連続な無限巡回部分群 $\Gamma = \{\sigma^k; k \in \mathbb{Z}\}$ を生成する。

2) 穴あき円板 $\mathbb{D}^* := \{z \in \mathbb{C}; 0 < |z| < 1\}$ と基本群 $\pi_1(\mathbb{D}^*)$ から $AutF$ への準同型 ρ で $Im\rho = \Gamma$ を満たすものに対し、ファイバー束 $\mathbb{D}^* \times_\rho F$ は Stein 多様体ではないが完備な Kähler 計量を持つ。

Demailly の学位論文 [Dm] や筆者の結果 [Oh-1] により、完備な Kähler 多様体上では L^2 理論が使いやすく、擬凸でなくても面白い結果が出せることがある。そこで定理 1 の応用を捜したところ、より詳しく次の事実が判明した。

定理 2. 商多様体 F/Γ は正則分離的であるが正則凸ではない。

Coeuré-Loeb 領域

Ω を $\mathbb{C}^n$ 内の有界な正則領域とする。Ω の正則自己同型群を $Aut\Omega$ で表す。固定点を持たない $Aut\Omega$ の元で生成される無限巡回群 Γ による商空間 Ω/Γ は、一般には Stein 多様体にはならない。以下ではこの点に潜む問題について論じる。

$Aut\Omega$ が Ω に推移的に作用するとき、すなわち Ω が等質有界領域であるときには、Ω/Γ は Stein 多様体であることが知られている (cf. [M])。このことより特に、穴あき円板 $\mathbb{D}^*$ 上の解析的ファイバー束でファイバーが等質有界領域であるものは、すべて Stein 多様体になることがわかる。

Ω が等質的であれば、Bergman 核 $K_\Omega(z,w)$ によって定まる Bergman 計量 $\partial\overline{\partial}\log K_\Omega(z,z)$ は $Aut\Omega$ の作用で不変であり、したがって Ω 上の完備な Kähler 計量である。さらにこのときそのポテンシャル関数である $\log K_\Omega(z,z)$ は

$$\lim_{z\to\partial\Omega}\log K_\Omega(z,z)=\infty$$

かつ

$$\sup|\partial\log K_\Omega(z,z)|_{\partial\overline{\partial}\log K_\Omega(z,z)}<\infty$$

を満たす (cf. [K-Oh])。その結果、ある定数 $C>0$ が存在して $\dfrac{-1}{\log\left(K_\Omega(z,z)+C\right)}$ は Ω 上の有界な強多重劣調和皆既関数となる。一般に、強多重劣調和な有界皆既関数を持つ複素多様体は超凸多様体と呼ばれる。ファイバーが超凸であるときには、Stehlé [St] により Serre の問題の答えは肯定的であることが知られている。したがって、Stein 多様体上の解析的ファイバー束は、ファイバーが等質な有界領域であれば Stein である。(このことは [K-Oh] に注意として書き加えておいてもよかったことであろう。)

この一方で、$\mathbb{C}^2$ 内の有界な擬凸 Reinhardt 領域 F で次の性質を持つものが存在する。

$\Omega=\{z\in\mathbb{C};|\zeta|<1\}\times F$ のとき、$AutF$ の元 σ に対して $\hat{\sigma}\in Aut\Omega$ を

$$\hat{\sigma}(\zeta,z):=\left(\frac{(2i-1)\zeta+1}{-\zeta+1+2i},\sigma(z)\right)$$

で定めるとき、$\hat{\Omega}:=\Omega/\{\hat{\sigma}^k;k\in\mathbb{Z}\}$ が Stein でないような σ が存在する。

$\mathbb{D}^*$ の基本群 $\pi_1(\mathbb{D}^*)$ からの準同型 $\rho : \pi_1(\mathbb{D}^*) \to AutF$ が $\rho(\pi_1(\mathbb{D}^*)) = \{\sigma^k; k \in \mathbb{Z}\}$ を満たせば $\hat{\Omega} \cong \mathbb{D}^* \times_\rho F$ となることから、特に F をファイバーとする $\mathbb{D}^*$ 上のファイバー束で Stein でないものが存在することになる。定義より、このファイバー束は $\mathbb{C}^*$ 上の束へと自然に拡張される。さらに後で示すように、σ として $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ まで作用が延長されるものがとれる。この作用は $(1, 1)$ を固定点に持つが、F 上では真性不連続な $\mathbb{Z}$ 作用を生成する。定理 1 と定理 2 はこの $\mathbb{Z}$ 作用に関するものである。

Stehlé の定理により F は超凸ではない。実際 F の Bergman 計量は完備ではない。(超凸なら Bergman 計量が完備になることは [B-P], [H], [C] により示されている。)　そもそも F が $\mathbb{Z}$ の作用で約せるということ自体が驚きであったし、ましてや F が $\mathbb{Z}$ 不変な完備 Kähler 計量を持つということは全然期待していなかった。そこで慎重を期すために、[C-L] に従って F の構成を復習しよう。

***F* の構成：**　$\mathbb{H} = \{u \in \mathbb{C}; \mathrm{Im} u > 0\}$, $T = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $V = T(\mathbb{H}^2) \subset \mathbb{C}^2 = \{(z_1, z_2); z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}$, $F = V/\mathbb{Z}^2$. ただし $\mathbb{Z}^2$ の作用は $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z_1 + 1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 + 1 \end{pmatrix}$ で生成されるものとする。同じ作用により商空間 $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}^2$ を作れば、写像 α : $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e^{2i\pi(z_1+z_2)} \\ e^{2i\pi z_2} \end{pmatrix}$ により $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}^2 \cong \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}; v_1 \in \mathbb{C}^*, v_2 \in \mathbb{C}^* \right\}$, $F \cong \alpha(V)$ である。

言い換えれば、$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値 $\lambda_1 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ および $\lambda_2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ に属する固有ベクトル $X_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 - 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ および $X_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 - 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対して

$$V = \left\{ u_1 X_1 + u_2 X_2; u_1, u_2 \in \mathbb{C}, \mathrm{Im} u_1 > 0, \mathrm{Im} u_2 > 0 \right\}$$

であり

$$\begin{pmatrix} (\lambda_1 - 1)u_1 + (\lambda_2 - 1)u_2 \\ u_1 + u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

なので、$\alpha\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2i\pi(\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2)} \\ e^{2i\pi(u_1+u_2)} \end{pmatrix}$ となることから

$$\alpha(V) = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in (\mathbb{D}^*)^2; |v_2|^{\lambda_1} < |v_1| < |v_2|^{\lambda_2} \right\} \tag{1}$$

が得られる。よって特に $\alpha(V)$ は対数凸な Reinhardt 領域であり、従って擬凸である[2]。以下では F を $\alpha(V)$ と同一視する。∂F は原点以外では局所的に Lipschitz 連続な関数のグラフになっているが、原点の近くでは Hartogs の三角領域 $|z_1| < |z_2|$ のように、領域内部の複素曲線をブローダウンしてできる境界点になっている。トポロジカルには、∂F は 3 次元トーラス内で 2 次元トーラスを一点につぶした形をしている。

$F = V/\mathbb{Z}^2$ であり $A \in SL(2,\mathbb{Z})$ であるから、A は V に作用するだけでなく F の自己同型 σ_A を誘導している。σ としてこの σ_A をとれば上の $\hat{\Omega}$ は Stein でないというのが [C-L] の主定理である。そこの非 Stein 性の証明は面白いが、定理１の主要な主張は完備 Kähler 性なのでここでは深入りしない。

ちなみに、座標 (v_1, v_2) を用いれば、A により $(v_1, v_2) = (e^{2i\pi(z_1+z_2)}, e^{2i\pi z_2})$ が $(e^{2i\pi(2z_1+z_2+z_1+z_2)}, e^{2i\pi(z_1+z_2)}) = (v_1^3 v_2^{-1}, v_1)$ に対応付けられるので、σ_A は $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ の自己同型へと拡張される。よってこれに付随した $\mathbb{C}^*$ 上の $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ 束が定まるが, $\hat{\Omega}$ が Stein ではないのでこの束も Stein ではない[3]。

容易にわかるように $\{\sigma_A^k(v_1, v_2); k \in \mathbb{Z}\}$ は F 内に集積点を持たないから $\hat{F} := F/\{\sigma_A^k; k \in \mathbb{Z}\}$ は複素多様体である。実際、これは集合

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{\ell} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2m\pi i \\ 2n\pi i \end{pmatrix}; \ell, m, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

が任意の $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \setminus \sqrt{-1}\mathbb{R}^2$ に対して $\mathbb{C}^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ 内で離散的であることから分かる。A の形からこの多様体のエンドは 2 個の連結成分を持つ[4]ので、これが非 Stein であることは Bochner-Hartogs 型拡張定理の簡単な帰結である (定理 2 の後半部の証明)。

定理１の証明

$\hat{F}$ は $\mathbb{D}^2$ の商空間なので、$\mathbb{D}^2$ 上の Bergman 計量が $\hat{F}$ 上の完備な Kähler 計量を誘導することは明白。 □

[2] [C-L] に従って書いたのでこういう説明になったが、$V \cong \mathbb{D} \times \mathbb{D}$ なので、$\alpha(V)$ の擬凸性は既に触れたように Miebach の定理に含まれている。しかし $\alpha(V) \cong \mathbb{D}^* \times \mathbb{D}^*$ であろうと即断してはいけない。すぐ述べるように、$\alpha(V)$ は軌道が相対コンパクトではない $\mathbb{Z}$ 作用を持つ。

[3] Stein 多様体内の任意の局所擬凸擬凸領域は Stein である。

[4] σ_A の作用は $\partial F \setminus (\{(0,0)\} \cup \{|v_1| = 1\} \times \{|v_2| = 1\})$ 上に離散的な作用として延び、その商空間としてコンパクトな 3 次元の Levi 平坦多様体が生じる。

$du_1 \wedge du_2$ は σ_A-不変なので F 上では Bergman 核だけでなく Bergman 核関数も σ_A-不変である。よって $\hat{F}$ は標準束が自明な完備 Kähler 多様体で、しかも $\hat{F}$ 上の自明束は正であるので、L^2 評価の方法により $\hat{F}$ が正則分離的であることを結論付けることができる (定理 2 の前半部の証明)。

ちなみに、 無限積

$$\cdots(1-v_1^{-3}v_2^8)(1-v_1^{-1}v_2^3)(1-v_2)(1-v_1)(1-v_1^3v_2^{-1})(1-v_1^8v_2^{-3})\cdots \quad (2)$$

が F 上で局所一様に収束することが言えれば $\hat{F}$ 上の非定数正則関数の具体例になるのだが、この収束には微妙な点があるようで、一つの課題として残っている。この観察を拡げて $\hat{F}$ の正則分離性が示せるところまで進めれば面白いかもしれない[5]。 また、A に限らず $SL(2,\mathbb{Z}) \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ に属する任意の対称行列についても同様の現象が観察できるであろう[6]。.

また、完全 Reinhardt 領域の正則自己同型群は砂田 [Sd] により決定されているので、次の問いはそれほど無謀なものではないだろう。

問題. 有界な対数凸完全 Reinhardt 領域の真性不連続な $\mathbb{Z}$ 作用による商空間は Stein か。

完備 Kähler 多様体上の完備 Kähler 束

Serre の問題と同様に、定理 1 をふまえて「完備 Kähler 多様体上をファイバー束とする完備 Kähler 多様体は完備な Kähler 計量を持つか」という問題が考えられる。定理 1 の状況ではファイバー F の Bergman 計量は完備ではないが、(u_1, u_2) という局所座標に関してたまたま $\dfrac{du_1 d\overline{u_1}}{(\mathrm{Im} u_1)^2} + \dfrac{du_2 d\overline{u_2}}{(\mathrm{Im} u_2)^2}$ が好都合にもその欠点を補ってくれているという見方もできる。このファイバー束を含む $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ 束も完備な Kähler 計量を持つ。$\dfrac{du_1 d\overline{u_1}}{|u_1|^2} + \dfrac{du_2 d\overline{u_2}}{|u_2|^2}$ が A の作用で不変だからである。より一般には次が成立する。

定理 3. 完備 Kähler 多様体 X の基本群 $\pi_1(X)$ から $GL(n,\mathbb{Z})$ への群準同型 $\rho : \pi_1(X) \to GL(n,\mathbb{Z})$ に対し、$\#\rho(\pi_1(X)) < \infty$ または $\rho(\pi_1(X)$ が同時対角化可能ならば、X 上のファイバー束 $X \times_\rho (\mathbb{C}^*)^n$ は完備な Kähler 計量を持つ。

[5] この原稿の元になるプレプリントを書いた後、足立真訓氏に [Z] を教えていただいた。そこでは $\hat{\Omega}$ 上の正則関数が無限級数によって構成されており、それらの解析接続を調べることによって $\hat{\Omega}$ の非 Stein 性の別証が与えられている。[Z, Proposition 5.1] には $\hat{F}$ 上の正則関数を表す (v_1, v_2) の Laurent 級数が Hirzebruch[Hrz] に基づいて記されている。

[6] この点については [C-L] にも同様の注意があるが、後に Dloussky[Dl-1,2,3] によって詳しく調べられた。

問題. 定理 3 を可能な限り一般化せよ。

参考文献

[A] Asserda, S., *The Levi problem on projective manifolds,* Math. Z. **219** (1995), no. 4, 631-636.

[B-P] Błocki, Z. and Pflug, P., *Hyperconvexity and Bergman completeness,* Nagoya Math. J., **151** (1998), 221-225.

[C] Chen, B.-Y., *Bergman completeness of hyperconvex manifolds,* Nagoya Math. J. **175** (2004), 165-170.

[C-L] Coeuré, G. and Loeb, J. J., *A counterexample to the Serre problem with a bounded domain of* $\mathbb{C}^2$ *as fiber,* Ann. of Math. **122** (1985), 329-334.

[C-D] Colţoiu, M. and Diederich, K., *The Levi problem for Riemann domains over Stein spaces with isolated singularities,* Math. Ann. **338** (2007), 2, 283-289.

[Dm] Demailly, J.-P., *Estimations* L^2 *pour l'opérateur* $\overline{\partial}$ *d'un fibré vectoriel holomorphe semi-positif au-dessus d'une variété kählérienne complète,* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **15** (1982), no. 3, 457-511.

[D-F] Diederich, K. and Fornaess, J. E., *Pseudoconvex domains: an example with nontrivial Nebenhülle,* Math. Ann. **225** (1977), no. 3, 275-292.

[D-Oh-1] Diederich, K. and Ohsawa, T., *A Levi problem on two-dimensional complex manifolds,* Math. Ann. **261** (1982), no. 2, 255-261.

[D-Oh-2] ——, *Harmonic mappings and disc bundles over compact Kähler manifolds,* Publ. Res. Inst. Math. Sci. 21 (1985), no. 4, 819-833.

[Dl-1] Dloussky, G., *Structure des surfaces de Kato,* Mém. Soc. Math. Fr., Nouv. Ser. tome 112 n. 14 (1984)

[Dl-2] ——, *Sur la classification des germes d'applications holomorphes contractantes,* Math. Ann. **280** (1988), 649-661..

[Dl-3] ——, *Une construction élémentaire des surfaces d'Inoue-Hirzebruch,* Math. Ann. **280**, 663-682.

[Ff] Fefferman, C., *The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudoconvex domains,* Invent. Math. **26** (1974), 1-65.

[Fn] Fornaess, J.E., *A counter-example for the Levi problem for branched Riemann domains over* C^n, Math. Ann. **234** (1978), 275-277.

[Ftn] Forstnerič, F., *Stein manifolds and holomorphic mappings — The homotopy principle in complex analysis,* second edition, Ergebnesse der Math. u. ihrer Grenzbebiete 3. Folge/ A series of Modern Surveys in Math. 56, 2017.

[Fk] Fujiki, A., *On the blowing down of analytic spaces,* Publ. Res. Inst. Math. Sci. **10** (1974), no. 2, pp. 473-507.

[F] Fujita, R., *Domaines sans point critique intérieur sur l'espace projectif complexe,* J. Math. Soc. Japan 15 (1963), 443-473.

[G-1] Grauert, H., *Charakterisierung der Holomorphiegebiete durch die vollständige Kählersche Metrik,* Math. Ann. **131** (1956), 38-75.

[G-2] ——, *On Levi's problem and the imbedding of real-analytic manifolds,* Ann. of Math. (2) **68** (1958), 460-472.

[G-3] ——, *Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen,* Math. Ann. 146 (1962), 331-368.

[G-4] ——, *Bemerkenswerte pseudokonvexe Mannigfaltigkeiten,* Math. Z. **81** (1963), 377-391.

[G-R] Grauert, H. and Remmert, R., *Theory of Stein spaces,* Grundlehren Math. Wiss. **236** Springer Berlin, 1984.

[G-Rms-1] Grauert, H. and Riemenschneider, O., *Kählersche Mannigfaltigkeiten mit hyper-q-konvexem Rand,* Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1970, pp. 61-79.

[G-Rms-2] ——, *Verschwindungssätze für analytische Kohomologiegruppen auf komplexen Räumen,* Invent. Math. **11** (1970), 263-292.

[H] Herbort, G., *The Bergman metric on hyperconvex domains,* Math. Z., **232** (1999), 183-196.

[Hi] Hirachi, K., *Construction of boundary invariants and the logarithmic singularity of the Bergman kernel,* Ann. of Math. (2) **151** (2000), no. 1, 151-191.

[Hrz] Hirzebruch, F., *Hilbert modular surfaces,* L'enseignement math. **19** (1973), 183-282.

[Hm] Hörmander, L., *L^2 estimates and existence theorems for the $\overline{\partial}$-operator,* Acta Math.**113** (1965), 89-152.

[K-Oh] Kai, C. and Ohsawa, T., *A note on the Bergman metric of bounded homogeneous domains,* Nagoya Math. J. **186** (2007), 157-163.

[Kd] Kodaira, K., *On Kähler varieties of restricted type,* Ann. Math. **60** (1954), 28-48.

[K-N] Kohn, J. and Nirenberg, L.,*Non-coercive boundary value problems,* Comm. Pure Appl. Math. **18** (1965), 443-492.

[M-M] Matsushima, Y. and Morimoto, A., *Sur certains espaces ins espaces fibrés holomorphes sur une variété de Stein,* Bull. Soc. Math. France **88** (1960), 137-155.

[M] Miebach, K., *Quotients of bounded homogeneous domains by cyclic groups,* Osaka J. Math. **47** (2010), 331- 352.

[N-1] Nakano, S., *On the inverse of monoidal transformation,* Publ. RIMS Kyoto Univ. **6** (1970/71), 483-502.

[N-2] ——, 弱 1-完備多様体の埋め込み (問題 6)　問題特集——多変数関数を中心として——(若林功編)　　数学　32(2) pp. 161-187.

[Ni] Nishino,T., *Nouvelles recherches sur les fonctions entières de plusieurs variables complexes. II, Fonctions entières qui se réduisent à celles d'une variable,* J. Math. Kyoto Univ. **9** (1969), 221-274.

[Oh-1] Ohsawa, T., *Vanishing theorems on complete Kähler manifolds,* Publ. Res. Inst. Math. Sci. **20** (1984), no. 1, 21-38.

[Oh-2] ——, L^2 $\overline{\partial}$*-cohomology with weights and bundle convexity of certain locally pseudoconvex domains,* to appear in Kyoto J. M.

[Oh-3] ——, *On the Levi problem on Kähler manifolds under the negativity of canonical bundles on the boundary*, Pure Appl. Math. Q. 18 (2022), no. 2, 763-771.

[Oh-4] ——, *Bundle convexity and kernel asymptotics on a class of locally pseudoconvex domains,* to appear.

[Oh-5] ——, *Geometry of analytic continuation on complex manifolds —— history, survey and report,* preprint.

[Oh-6] ——, *On the Levi problem under the negativity of canonical bundles on the boundary,* preprint.

[Oh-7] ——, *On hyperconvexity and towards bundle-valued kernel asymptotics on locally pseudoconvex domains,* Rev. Roumaine Math. pure et appl. **67** (2023), 1-1, 169-189.

[P] Pinney, K. R., *Line bundle convexity of pseudoconvex domains in complex manifolds,* Math. Z. **206** (1991), no. 4, 605-615.

[R] Rosay, J.-P., *Extension of holomorphic bundles to the disc (and Serre's problem on Stein bundles),* Ann. Inst. Fourier, Grenoble **57** (2007), 517-523.

[Sd] Sunada, T., *On bounded Reinhardt domains,* Proc. Japan Acad. **50** (1974), 119-123.

[S] Siu, Y.-T., *Holomorphic fiber bundles whose fibers are bounded Stein domains with zero first Betti number,* Math. Ann. **219** (1976), 171-192.

[St] Stehlé, J.-L., *Fonctions plurisousharmoniques et convexité holomorphe de certains fibrés analytiques,* Lecture Notes in Math., Vol. 474, Springer, Berlin, 1975, pp. 155-179.

[Stn-1] Stein, K., *Analytischen Funktionen mehrerer komplexen veränderlichen zu vorgegebenen Periodizitätsmoduln und das zweite Cousinsche Problem,* Math. Ann. **123** (1951), 201-222.

[Stn-2] ——, *Überlagerungen holomorph vollständiger komplexer Räume,* Arch. Math. (Basel) **7** (1956), 354-361.

[T-1] Takayama, S., *The Levi problem and the structure theorem for non-negatively curved complete Kähler manifolds,* J. Reine Angew. Math. **504** (1998), 139-157.

[T-2] ——, *Adjoint linear series on weakly 1-complete Kähler manifolds. II. Lefschetz type theorem on quasi-abelian varieties,* Math. Ann. 312 (1998), no. 2, 363-385.

[Tk] Takeuchi, A., *Domaines pseudoconvexes infinis et la métrique riemannienne dans un espace projectif,* J. M. Soc. Japan 16(1964), 159-181.

[U] Ueda, T., *Pseudoconvex domains over Grassmann manifolds,* J. Math. Kyoto Univ. 20-2 (1980), 391-394.

[Y] Yamaguchi, H., *Parabolicité d'une fonction entière,* J. Math. Kyoto Univ. **16** (1976), 71-92.

[Z] Zaffran, D., *Serre problem and Inoue-Hirzebruch surfaces,* Math. Ann. **319** (2001), 395-420.

補足

[C-L] においては変換 σ_A による $\mathbb{C}^*$ 上の F 束 $\hat{\Omega}$ が非 Stein であることが主要結果であり、$\hat{F}$ が正則分離的であるが正則凸でないことはそれに触発された観察であったが、[Z] では [H] で $\hat{F}$ 上の正則関数が決定されていることの他に、$\hat{F}$ と Hirzebruch-Inoue 曲面の関係が次のように指摘されている。

In 1973 Hirzebruch considered certain quotients of the bidisc, that can be partially compactified to obtain Stein complex spaces with an isolated singularity. He called these spaces "cusps", and gave explicitly their minimal desingularization, whose exceptional set consists of a cycle of rational curves. Then in 1977 Inoue constructed new surfaces (i.e. two-dimensional compact complex manifolds) which are gluings of a pair of desingularized cusps. These "Inoue-Hirzebruch surfaces" have algebraic dimension zero, Betti numbers $b_1 = 1$ and $b_2 > 0$, thus belong to Kodaira's class VII_0, which is still not completely understood (examples are known, but the existence of other ones remains an open problem). One can also construct the Inoue-Hirzebruch surfaces by the methods of toroidal embeddings (see Oda's book). On the other hand Kato pointed out that they contain "global spherical shells" and this led Dloussky to give in 1988 a simpler construction and study of these.

より詳しくは、$\hat{F}$ の $(0,0)$ の側のエンドに 1 点 P を加えた空間 V は P を孤立特異点とする Stein 空間である。これを上ではカスプ (cusp) と呼んでいるが、孤立特異点 (V,P) をカスプと呼ぶことも多いようである。解析空間の孤立特異点についてはさまざまな視点から多くの研究結果があるが、(V,P) は特異点解消が具体的に記述しうる例であり、リンクが興味深い位相構造を持ちうる系列の一部であり、また楕円曲線のモジュライの Hilbert による一般化に表れる特異点であるという理由により、ある意味で避けて通れない特異点でもある (cf.[H], [M], [E-K])。他方、$\hat{F}$ のもう一方のエンドに Levi 平坦な実超曲面が貼り付くということは、本文

で述べたように適当な座標を使って式を書いてみれば明瞭であるが、二つのカスプをこの実超曲面 Q に沿って貼り合わせた後特異点解消を経て作られるコンパクトな複素曲面が、VII_0 型曲面のうちで Hopf 曲面に次いで解明が進められたものの１つである井上曲面であるということは、もっと広く知られていてもよかったし、さらに [A-B] において注意されているような、Q 上の Levi 葉層がアファインであるという事実のモジュライ理論における意味も、将来 Levi 平坦多様体の例が集積された暁にはもっとはっきりと理解されるようになるかもしれない。

参考文献

[A-B] Adachi, M. and Biard, S., *On Levi flat hypersurfaces with transversely affine foliation,* Math. Z. **301** (2022), 373-383.

[E-K] Elkies, N. and Kumar, A., *K3 surfaces and equations for Hilbert modular surfaces,* Algebra and Number theory 8:10(2014) dx.doi.org/10.2140/ant.2014.8.2297

[H] Hirzebruch, F., *Hilbert modular surfaces,* L'enseignement math. **19** (1973), 183-282.

[M] Morita, S., *Almost complex manifolds and Hirzebruch invariant for isolated singularities in complex spaces,* 数理解析研究所講究録　170 巻　1973 年　36-56.

[Z] Zaffran, D., *Serre problem and Inoue-Hirzebruch surfaces,* Math. Ann. **319** (2001), 395-420.