

提出先：教養学部教務課前のレポートボックス

提出期間：2019/6/20（木）～2019/7/2（火）13:00

※ このファイルを **B4** サイズの用紙に縦向きに印刷し、レポート用紙とすること。紙面の大きさは B4 に設定されているが、プリンタの設定は各自で確認すること。なお、印刷が困難である場合には速やかに足助まで申し出ること。

学生証番号	氏名	共同作成者（ある場合）

問. $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ とする. $\mathfrak{so}_n = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A + {}^tA = O_n\}$ と置く. また, $SO_n = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A {}^tA = {}^tAA = E_n, \det A = 1\}$ と置く^{†1}.

1) \mathfrak{so}_n は $M_n(\mathbb{R})$ の部分線型空間であることを示せ.

※ 部分線型空間であることを示すには、(今の場合) \mathfrak{so}_n が部分線型空間の定義を満たすことを示せば良い。これはそれほど面倒ではないはずである。

2) \mathfrak{so}_n の基底を一組（一つ）求めよ^{†2} また、 \mathfrak{so}_n の次元を求めよ。

3) $SO_n \subset GL_n(\mathbb{R})$ が成り立つことを示せ。また、 SO_n は $M_n(\mathbb{R})$ の部分線型空間ではないことを示せ。

4) a) $A, B \in SO_n$ について $AB \in SO_n$ が成り立つことを示せ。

b) $A \in SO_n$ について $A^{-1} \in SO_n$ が成り立つことを示せ。また、 $A^{-1} = {}^tA$ が成り立つことを示せ。

c) $E_n \in SO_n$ が成り立つことを示せ。

5) $F: \mathbb{R} \rightarrow SO_n$ とし、 $F = [f_{ij}]$ と成分を用いて表す。 f_{ij} は関数であるが、これらは全て微分可能だとする。微分を D で表すこととして、 $DF = [Df_{ij}]$ と定める（成分をそれぞれ微分する）。 $F(0) = E_n$ が成り立つとすると、 $DF(0) \in \mathfrak{so}_n$ が成り立つことを示せ。

ヒント： $\forall t \in \mathbb{R}, F(t) {}^tF(t) = E_n$ が成り立つ。

※ 手際よく記述しないと紙面が足りなくなるので注意すること。紙を足すことは認めない（万一足した場合には未提出として扱う）。標準的な証明を記した場合、2) と 5) が長めになると思われる。

※ 参考文献がある場合には最後にまとめて箇条書きで示すこと。

※ 裏面を用いても良いが、表面の末尾にその旨示すこと。また、裏面を用いる際には表面と上下が同一になるように（左あるいは右綴じになるように）用いること。

(以上)

^{†1} \mathfrak{so}_n , SO_n は一般的な記号である。また、 SO_n は特殊直交群 (special orthogonal group), \mathfrak{so}_n は SO_n の Lie 環とそれぞれ呼ばれ、剛体の運動 (rigid motion) などと関連が深い。

^{†2} 証明も記すこと。何か基底らしきものを結果のみ記しても、それが基底であるかどうか、読んでいる側は通常は納得してくれない。一般的に「求めよ」という場合には、読む側が納得できる根拠（今の場合、基底であることの根拠）がいる。数学の場合には原則として、根拠は証明である。