

2018年度線型代数学演習（理I 36–39組向け，足助担当）問題 22 v6

'18/11/15（木）

改変履歴. '18/11/4 : (v0) 暫定版作成. 概ね 11/1 までの「線型代数学」の講義の内容に対応する.

'18/11/9 : (v1) 日程を修正. 問 22.9 を修正. 問 22.10 の誤植を修正. 幾つか問を追加. 小問を追加している問もあるので，発表を考えているならば注意すること.

'18/11/9 : (v2) 問 22.12 を修正.

'18/11/14 : (v3) 問 22.12 と 22.13 に小問を追加.

'18/11/15 : (v4) 定義 22.7 を修正. 問 22.4 に小問を追加の上，難易度の指定を追加. 問 22.12 の文言を修正. 問 22.14 を追加の上，その後の問題番号を変更.

18/11/16 : (v5) 問 22.15 を追加の上，その後の問題番号を変更.

18/12/20 : (v6) 問 22.2 の 4) に補足を追加. 問 22.12 の 4) を修正.

以下， $K = \mathbb{R}$ あるいは $K = \mathbb{C}$ とする.

行列式

問 22.1. $v \in K^3$ に関する方程式

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 5 & 8 & 3 \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

をクラメルの公式を用いる方法と，掃き出し法を用いる方法双方で解け.

※ クラメルの公式を用いると非常に計算量が多いことを見て取れば良いが，発表するならきちんと計算すること.

問 22.2. $A \in M_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ とし， $x \in \mathbb{R}^n$ に関する方程式

$$(22.3) \quad Ax = b$$

を考える. ここで， A, b の成分は全て整数とする ($A \in M_n(\mathbb{Z})$, $b \in \mathbb{Z}^n$ とする). また， $A \in GL_n(\mathbb{R})$ とする (従って $x = A^{-1}b$ が方程式 (22.3) の唯一の解である).

- 1) $\det A \in \mathbb{Z}$ が成り立つことを示せ. また， $A^{-1} \in M_n(\mathbb{Q})$ が成り立つことを示せ (成分は全て有理数であることを示せ).
- 2) 方程式 (22.3) の解 x は $x \in \mathbb{Q}^n$ を満たす (成分は全て有理数である) ことを示せ.
- 3) $\det A = \pm 1$ とする. このとき， $A^{-1} \in M_n(\mathbb{Z})$ が成り立つことを示せ. また，方程式 (22.3) の解 x は $x \in \mathbb{Z}^n$ を満たす (成分は全て整数である) ことを示せ.

4) 3) の後半の逆は成り立たない.

i) $\det A$ が A の異なる二つの列をそれぞれ割り切る ($A = [a_1 \cdots a_n]$ とすると, 例えば $a_1 = (\det A)a'_1$, $a_2 = (\det A)a'_2$ がある $a'_1, a'_2 \in \mathbb{Z}^n$ について成り立つ).

※ 実際にはこの時 $\det A = \pm 1$ が成り立つ.

ii) $\det A$ が b を割り切る.

のいずれかが成り立つならば方程式 (22.3) の解は \mathbb{Z}^n に属することを示せ.

以下では実行列や実線型写像の固有値や固有ベクトルも複素数の範囲で考える.

行列と固有値, 行列の対角化

問 22.4. 以下の行列について, 固有値を全て求めよ. また, それぞれの固有値に属する固有空間の基底を一組与えよ. なお, ここでは全て複素数の範囲で考えることにする.

1) $\begin{bmatrix} \lambda_1 & a_{12} \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, ただし $\lambda_1, \lambda_2, a_{12} \in \mathbb{C}$ とする.

2*) $\begin{bmatrix} \lambda_1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & \lambda_2 & a_{23} \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$, ただし $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, a_{12}, a_{13}, a_{23} \in \mathbb{C}$ とする.

3) $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, ただし $a, b \in \mathbb{C}$ とする.

※ 固有値や固有ベクトルを求める具体的な計算は演習ではこれ以上扱わない. 各自で補うこと.

問 22.5. $A \in M_n(K)$ とする. $v_1, \dots, v_n \in K^n$ と $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ について

$$Av_i = \lambda_i v_i,$$

ただし $1 \leq i \leq n$, が成り立つとする. $P = [v_1 \cdots v_n]$, $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$ とする.

1) $AP = PD$ が成り立つことを示せ.

2) $P \in GL_n(K)$ とする. このとき $P^{-1}AP = D$ が成り立つことを示せ.

3) $P \in GL_n(K)$ が成り立つことは, $\{v_1, \dots, v_n\}$ が K^n の基底をなすことと同値である^{†1}.

このことを踏まえて, $A \in M_n(\mathbb{C})$ について, $P \in GL_n(\mathbb{C})$ が存在して $P^{-1}AP$ が対角行列であることは, A の固有ベクトルからなる \mathbb{C}^n の基底が存在することと同値であることを示せ.

^{†1} 「そうだったっけ?」という場合には参考書などで復習すること.

問 22.6. $A \in M_n(\mathbb{R})$ とし, A の固有値は全て実数だとする. また, A は対角化可能だとする. 最後に, \mathbb{R}^n の標準的なノルムを $\|\cdot\|$ で表す.

1) $\lambda = \sup_{\substack{v \in \mathbb{R}^n \\ \|v\|=1}} \frac{\|Av\|}{\|v\|}$ と置く. λ は A の固有値の絶対値の最大値と一致することを示せ.

2) $\lambda' = \inf_{\substack{v \in \mathbb{R}^n \\ \|v\|=1}} \frac{\|Av\|}{\|v\|}$ と置く. λ' は A の固有値の絶対値の最小値と一致することを示せ.

※ $\sup_{\substack{v \in \mathbb{R}^n \\ \|v\|=1}} \frac{\|Av\|}{\|v\|}$ は A の作用素ノルムと呼ばれ, 重要である.

定義 22.7*. $A \in M_n(\mathbb{R})$ とする. $P \in GL_n(K)$ が存在して $P^{-1}AP$ が対角行列であるとき, A は K 上対角化可能であると言う.

※ 講義では常に $K = \mathbb{C}$ としている.

問 22.8*. 1) $A \in M_n(\mathbb{R})$ とし, A の固有値は全て実数だとする. A が \mathbb{C} 上対角化可能であることと, A が \mathbb{R} 上対角化可能であることは同値であることを示せ.

2) $A \in M_n(\mathbb{R})$ とする. A が \mathbb{R} 上対角化可能であることと, A が \mathbb{C} 上対角化可能であって, A の固有値が全て実数であることは同値であることを示せ.

問 22.9. $A \in M_n(K)$, $P \in GL_n(K)$ とする.

1) A の固有多項式と $P^{-1}AP$ の固有多項式は一致することを示せ. また, A の固有値と, $P^{-1}AP$ の固有値は重複度を込めて一致することを示せ.

2) A の固有多項式と tA の固有多項式は一致することを示せ. また, A の固有値と, tA の固有値は重複度を込めて一致することを示せ.

問 22.10. $A \in M_n(\mathbb{R})$ とする.

1) n が奇数ならば A は実固有値 (固有値であって, 実数であるもの) を持つことを示せ. 一方, n が偶数ならば A は実固有値を持つことも持たないこともあることを示せ.

2) $\lambda \in \mathbb{C}$ が A の固有値ならば $\bar{\lambda}$ も A の固有値であることを示せ. また, $v \in \mathbb{C}^n$ が λ に属する A の固有ベクトルならば \bar{v} は $\bar{\lambda}$ に属する A の固有ベクトルであることを示せ.

問 22.11 (対角化不可能な行列). 1) $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & a \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ とする.

i) A が \mathbb{C} 上対角化可能であることと, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ または $a = 0$ が成り立つことは同値であることを示せ. また, $P^{-1}AP$ が対角行列であるような $P \in GL_2(\mathbb{C})$ の一つと, その P に関する $P^{-1}AP$ を求めよ.

- ii) $A \in M_2(\mathbb{R})$ とすると, A が \mathbb{R} 上対角化可能であることと, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ または $a = 0$ が成り立つことは同値であることを示せ. また, $P^{-1}AP$ が対角行列であるような $P \in GL_2(\mathbb{R})$ の一つと, その P に関する $P^{-1}AP$ を求めよ.
- 2) $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ とする.
- i) A は \mathbb{C} 上対角化可能であることを示せ. また, $P^{-1}AP$ が対角行列であるような $P \in GL_2(\mathbb{C})$ の一つと, その P に関する $P^{-1}AP$ を求めよ.
- ii) $A \in M_2(\mathbb{R})$ とする. A が \mathbb{R} 上対角化可能であることと, $A = \pm E_2$ が成り立つことは同値であることを示せ.

問 22.12. $f \in K[x]$ とし,

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_r x^r$$

と a_0, \dots, a_r を用いて表す. $A \in M_n(K)$ について,

$$f(A) = a_0 E_n + a_1 A + \cdots + a_r A^r$$

と定める (x に A を代入して得られる行列の多項式などと呼ぶ).

- 1) A が K 上対角化可能ならば, 任意の $f \in K[x]$ について $f(A)$ も K 上対角化可能であることを示せ.
 ヒント: $P \in GL_n(K)$ について $P^{-1}AP$ が対角行列ならば $P^{-1}f(A)P$ もそうである.
- 2) 任意の $A \in M_n(K)$ について, ある $f \in K[x]$ で 0 でないものが存在して $f(A) = O_n$ が成り立つことを示せ.
 ※ ケーリー・ハミルトンの定理を用いてもよいが, そのような大道具は不要である. E_n, A, A^2, \dots が生成する $M_n(K)$ の部分線型空間を考えてみよ.
- 3) 命題「任意の $f \in K[x]$ について $f(A)$ は対角化可能である」が成り立つならば, A は対角化可能であることを示せ. また, ある $f \in K[x]$, $f \neq 0$ について $f(A)$ が対角化可能であっても A は対角化可能とは限らないことを示せ.
- 4) $A \in M_n(K)$ は K 上対角化可能とする. $f \in K[x]$ について $f(A)$ は対角化可能である (小問 3) が, $f(A)$ の固有値は $f(\lambda)$, λ は A の固有値, と表すことができることを示せ. また, μ を $f(A)$ の固有値とすると, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ を $f(\lambda_j) = \mu$ が成り立つ相異なる全ての A の固有値とする. m_i を λ_i の重複度とすると, μ の重複度は $m_1 + \cdots + m_k$ に等しいことを示せ.
- 5*) $A \in M_n(K)$ が対角化不可能な場合でも 4) と同じことが成り立つことを示せ.
 ヒント: 行列の三角化について調べてみよ.

問 22.13. $A \in \text{GL}_n(K)$ とする.

1) λ を A の固有値とすると $\lambda \neq 0$ が成り立つことを示せ.

ヒント: A の固有値と, 固有多項式の係数の関係について考えてみよ. あるいは A の三角化を考えても良い.

2) μ を A^{-1} の固有値とすると, A の固有値 λ が存在して $\mu = \lambda^{-1}$ が成り立ち, 更に, μ の重複度は λ の重複度に等しいことを示せ.

ヒント: A^{-1} の固有多項式を A の固有多項式を用いて表してみよ.

3) A は対角化可能だとする. λ に属する A の固有空間は λ^{-1} に属する A^{-1} の固有空間に等しいことを示せ.

※ A が対角化不可能な場合にも類似のことが成り立つが, 少し複雑になる.

4) ある $f \in K[x]$ について $A^{-1} = f(A)$ が成り立つことを示せ.

問 22.14. 以下の主張はいずれも偽である. 反例を一つずつ挙げよ. $A \in M_n(K)$ とする.

1) A が対角化可能ならば A は正則である.

2) A が正則ならば A は対角化可能である.

3) A が固有値 0 を持てば A は対角化不可能である.

問 22.15 (問 22.4 の 1) 及び問 22.11 も参照のこと). $a \in \mathbb{R}$ とし, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ とする.

1) A の固有値は 1 と a であることを確かめよ ($a = 1$ の場合には 1 が重複していると考え).

2) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ は固有値 1 に属する A の固有ベクトルであることを示せ.

以下では A が対角化可能であるかどうか調べる. とりあえず全て実数の範囲で考えることとし, $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ を a に属する A の固有ベクトルとする.

3) A が (\mathbb{R} 上) 対角化可能であるためには上のような v であって, $v_2 \neq 0$ なるものが存在することが必要十分であることを示せ.

4) \mathbb{R}^2 の部分線型空間 $\mathbb{R}v$ は A により不変である, 即ち,

$$\forall u \in \mathbb{R}v, Au \in \mathbb{R}v$$

が成り立つことを示せ. また, このことは図形的 (幾何的) には, v を方向ベクトルとし, 原点を通る直線は l とすると, l は A により l 上に写されることに対応するこ

とを確かめよ (a の値によっては l が原点のみに写されることがあるので, l が丁度 l 全体に写されるとは限らない. 5) も参照のこと).

5) $v_2 \neq 0$ とし, \mathbb{R}^2 を yx -平面と考えて, l の傾きを考える. 即ち, $\frac{v_1}{v_2}$ を考える. このとき, l の A による像は

i) $a = 0$ ならば原点のみであって, また

ii) $a \neq 0$ ならば, 傾きが $\frac{1}{a} \frac{v_1}{v_2} + \frac{1}{a}$ の直線である

ことを示せ.

6) $a \neq 0$ とする. 方程式 $\alpha = \frac{1}{a}\alpha + \frac{1}{a}$ は $a \neq 1$ の時のみ解を持ち, また, 解は一意的であることを示せ. より詳しく,

a) $a \in (0, 1)$ (开区間) ならば $\alpha \geq \frac{1}{a-1}$ のとき $\alpha \leq \frac{1}{a}\alpha + \frac{1}{a}$ が成り立つ (複号同順)

また,

b) $a \notin [0, 1]$ ならば $\alpha \leq \frac{1}{a-1}$ のとき $\alpha \geq \frac{1}{a}\alpha + \frac{1}{a}$ が成り立つ (複号同順)

ことを示せ.

7) $a \neq 0, 1$ とする. このとき, \mathbb{R}^2 内の, 原点を通る直線であって, A により (直線としては) 変化しないものが一意的に存在することを示せ.

※ 線型代数の範疇で示すこともできるし, 6) を踏まえて傾きの v_1, v_2 に関する連続性を用いて微積分を用いて示すこともできる.

8) $a = 0$ ならば, $v_2 \neq 0$ を満たす, 0 に属する固有ベクトルが存在することを示せ. また, $a = 1$ ならば 1 に属する固有空間は 1 次元であることを示せ.

A が \mathbb{R} 上対角化可能であることの必要十分条件は $a \neq 1$ であることを示せ.

A が \mathbb{C} 上対角化可能であることの必要十分条件は $a \neq 1$ であることを示せ.

内積と固有値

問 22.16. $A \in M_n(\mathbb{C})$ とする.

1) $\langle \cdot | \cdot \rangle$ を \mathbb{C}^n の標準的なエルミート計量 (内積) とする. このとき,

$$\forall v, w \in \mathbb{C}^n, \langle Av | w \rangle = \langle v | A^*w \rangle$$

が成り立つことを示せ.

2) A をエルミート行列とする. 即ち, $A^* = {}^t\bar{A}$ と置くと $A^* = A$ が成り立つとする (A^* を A の随伴行列と呼ぶ). このとき, A の固有値は実数であることを示せ. 特に, A を実対称行列とすると, A の固有値は実数であることを示せ.

- 3) A を歪エルミート行列とする。即ち、 $A^* = -A$ が成り立つとする。このとき、 A の固有値は純虚数であることを示せ。特に、 A を実歪対称行列とすると、 A の固有値は純虚数であることを示せ。

問 22.17. $\langle \cdot | \cdot \rangle$ を \mathbb{R}^n の標準的なユークリッド計量とする。さて、 $A \in M_n(\mathbb{R})$ を実対称行列とする。 λ, μ を A の相異なる固有値、 $v, w \in \mathbb{R}^n$ をそれぞれ λ, μ に属する A の固有ベクトルとすると、 $\langle v | w \rangle = 0$ が成り立つことを示せ。

※ 同様のことが A が歪対称行列や直交行列であっても成り立つ。また、 \mathbb{C}^n と標準的なエルミート計量を考えれば、エルミート行列、歪エルミート行列やユニタリ行列についても成り立つが、証明がやや複雑になる。実際には A が正規行列である、即ち $AA^* = A^*A$ が成り立つ、ことがこのようなことが成り立つための必要十分条件である。

問 22.18 (問 22.16 も参照のこと). $\langle \cdot | \cdot \rangle$ を \mathbb{C}^n の標準的なエルミート計量 (内積) とする。実ベクトルしか考えていない場合にはこれを \mathbb{R}^n の標準的なユークリッド計量 (内積) と考える。

$$O_n = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = A{}^tA = E_n\},$$

$$U_n = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A^*A = AA^* = E_n\}$$

と置く (それぞれ (実) 直交群, ユニタリ群と呼ばれる)。

- 1) $A \in O_n$ ならば $A \in U_n$ が成り立つことを示せ。
- 2) $A \in U_n$ であることと,

$$\forall v, w \in \mathbb{C}^n, \langle Av | Aw \rangle = \langle v | w \rangle$$

が成り立つことは同値であることを示せ。

- 3) 実数の範囲で考える。 $A \in O_n$ であることと,

$$\forall v, w \in \mathbb{R}^n, \langle Av | Aw \rangle = \langle v | w \rangle$$

が成り立つことは同値であることを示せ。

- 4) $A \in U_n$ とし、 $\lambda \in \mathbb{C}$ を A の固有値とする。この時、 $|\lambda| = 1$ が成り立つことを示せ。また、 $A \in O_n$ ならば $\lambda = \pm 1$ が成り立つことを示せ。

線型変換と固有値

線型変換は対象となる（その線型変換が作用する）線型空間の基底^{†2}を固定すると、正方行列を用いて表されるのであった^{†3}。このような行列を用いて様々な量（値など）が定まる。これらは一見行列を用いないと定まらないように見えるが、実際には線型写像により定まる。

以下では f を K^n の線型変換とする。また、 K^n の（順序付き）基底 \mathcal{E} について、 f を K^n から K^n への線型写像と見做して得られる $(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ に関する表現行列を f の \mathcal{E} に関する表現行列と呼ぶ。

定義 22.19. \mathcal{E} を K^n の順序付き基底とし、 A を f の \mathcal{E} に関する表現行列とする。

- 1) $\operatorname{tr} f = \operatorname{tr} A$ と置いて、 f のトレース（跡）^{せき}と呼ぶ。
- 2) $\det f = \det A$ と置いて、 f のデターミナント（determinant, 行列式）と呼ぶ^{†4}。
- 3) A の固有値と、その重複度を f の固有値およびその重複度と呼ぶ。
- 4) A の固有多項式を f の固有多項式と呼ぶ。

- 問 22.20.**
- 1) $\operatorname{tr} f$ は \mathcal{E} の選び方に依らないことを示せ。即ち、 \mathcal{E}' を K^n の順序付き基底とし、 A' を f の \mathcal{E}' に関する表現行列とすれば $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A'$ が成り立つことを示せ。
 - 2) $\det f$ は \mathcal{E} の選び方に依らないことを示せ。
 - 3) f の固有多項式は \mathcal{E} の選び方に依らないことを示せ。

問 22.21. $K = \mathbb{C}$ とする。 V を複素線型空間とし、 \mathcal{E} を V の順序付き基底とする。また、 A を f の \mathcal{E} に関する表現行列とする。 $\lambda \in \mathbb{C}$ を A の固有値とし、 $x_\lambda \in \mathbb{C}^n$ を λ に属する A の固有ベクトルとする。

- 1) $v_\lambda = \mathcal{E}x_\lambda \in V$ とすると v_λ は λ に属する f の固有ベクトルであることを示せ。
- 2) \mathcal{E}' を V の順序付き基底とする。 A' を f の \mathcal{E}' に関する表現行列、 $\lambda \in \mathbb{C}$ を A の固有値とする（ A' としても同じことである。問 22.20 を参照のこと）。また、 $x'_\lambda \in \mathbb{C}^n$ を λ に属する A' の固有ベクトルとする。このとき、 x'_λ は λ に属する A の固有ベクトルであることもあるし、そうでないこともある。このことを例を挙げることにより示せ。

※ 少し大げさであるが、これは x_λ や x'_λ の成分が反変テンソルであることの反映である。これらは適切な基底（例えば基底関数系や慣性系）とペアリング^{†5}を取ることで、基底によらない状態を表す。

^{†2}正確には順序付き基底

^{†3}そんなことは知らん、という場合には基底を用いて線型写像を行列で表す方法について復習すること。既に身についたことになっている。

^{†4}行列とはもはや何の関係もないので、「デターミナント」と覚えた方がよい。

^{†5}あるいは内積とも呼ばれるが、こちらはかなり状況を制限しないと適切でない。

(以上)