Sierpinski gasket 上のブラウン運動の片側滞在時間分布について

矢野 裕子 (京大数学教室・GCOE 特定助教)[1]

一次元ブラウン運動の正側滞在時間が逆正弦法則に従うことはよく知られた事実である (P. Lévy (1939))：$(B_t)_{t\geq 0}$ を一次元ブラウン運動，$A_+(t) = \int_0^t \mathbf{1}_{(0,\infty)}(B_s)\mathrm{d}s$ とするとき，各 $t>0$ に対して次が成り立つ：

$$\mathbb{P}_0\left(\frac{1}{t}A_+(t) \leq x\right) = \mathbb{P}_0(A_+(1) \leq x) = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x}, \quad 0 \leq x \leq 1. \tag{1}$$

この結果をより一般の確率過程に対して拡張する試みが多くなされており，既に興味深い結果が得られている．特に一次元拡散過程とそれに関連する確率過程に対する一般化として，Lamperti (1958)，Barlow-Pitman-Yor (1989)，渡辺 (1995)，笠原-矢野 (2005)，渡辺-矢野-矢野 (2005) 等がある．本講演では，二次元 Sierpinski gasket 上のブラウン運動の片側滞在時間分布について考察する．なお，本講演は梶野直孝氏，熊谷隆氏，Mateusz Kwaśnicki 氏及び渡辺信三氏との共同研究に基づく．

先ず，Barlow-Perkins [1] による二次元 Sierpinski gasket 上のブラウン運動に関する結果を振り返る．$G = G_+ \cup G_-$，$G_+ \cap G_- = \{0\}$ を非有界二次元 Sierpinski gasket とし，$X = ((X_t)_{t\geq 0}, (\mathbb{P}_x)_{x\in G})$ を G 上のブラウン運動とする．X の推移確率は Hausdorff 測度 μ に関する対称な密度 $p_t(x,y)$ (熱核と呼ばれる) を持つ．熱核 $p_t(x,y)$ は $(t,x,y) \in (0,\infty)\times G\times G$ について連続で，更に次の劣 Gauss 型評価が成り立つことが知られる：

$$\begin{aligned} &C_1 t^{-\frac{d_s}{2}} \exp\left\{-C_2\left(\frac{|x-y|^{d_w}}{t}\right)^{\frac{1}{d_w-1}}\right\} \\ &\qquad \leq p_t(x,y) \leq C_3 t^{-\frac{d_s}{2}} \exp\left\{-C_4\left(\frac{|x-y|^{d_w}}{t}\right)^{\frac{1}{d_w-1}}\right\}, \quad t>0,\ (x,y)\in G\times G. \end{aligned} \tag{2}$$

ここで，C_1, C_2, C_3, C_4 は t,x,y に無関係な正定数である．また $d_s = 2\log 3/\log 5$，$d_w = \log 5/\log 2$ はそれぞれスペクトル次元，ウォーク次元と呼ばれる．X のリゾルベントもまた μ に関する対称かつ結合連続な密度 $u_\lambda(x,y)$ を持ち，次が評価が成り立つことが知られている：

$$\begin{aligned} &C_5 \lambda^{\frac{d_s}{2}-1} \exp\left\{-C_6 \lambda^{\frac{1}{d_w}}|x-y|\right\} \\ &\qquad \leq u_\lambda(x,y) \leq C_7 \lambda^{\frac{d_s}{2}-1} \exp\left\{-C_8 \lambda^{\frac{1}{d_w}}|x-y|\right\}, \quad \lambda>0,\ (x,y)\in G\times G. \end{aligned} \tag{3}$$

但し C_5, C_6, C_7, C_8 は t,x,y に無関係な正定数．G の全ての点はそれ自身に関して regular である (i.e., $\forall x,\ \mathbb{P}_x(T_x = 0) = 1$，但し $T_x = \inf\{t>0 : X_t = x\}$)．また，$X$ は point recurrent である．X の局所時間 $L(t,x)$ が存在し，次を満たす：

$$\int_0^t f(X_s)\mathrm{d}s = \int_G f(x)L(t,x)\mu(\mathrm{d}x).$$

[1] yyano@math.kyoto-u.ac.jp

今，$L(t)=L(t,0)$ とおく．η を L の右連続逆過程とする．このとき，

$$\mathbb{E}_0\left[\mathrm{e}^{-\lambda\eta(l)}\right]=\mathrm{e}^{-l/u_\lambda(0,0)},\quad \lambda>0 \tag{4}$$

である．さて，

$$A_\pm(t)=\int_0^t \mathbf{1}_{G_\pm}(X_s)\mathrm{d}s \tag{5}$$

とし，$A_\pm^{-1}(t)=\inf\{s>0:A_\pm(s)>t\}$ とする．$X_\pm(t)=X(A_\pm^{-1}(t))$ とする．このとき，X_+ と X_- は互いに独立である．$L_\pm(t)=L(A_\pm^{-1}(t))$ とし，$\eta_\pm$ を $L_\pm$ の右連続逆過程とする．

$$\mathbb{E}_0[\mathrm{e}^{-\lambda\eta_\pm(l)}]=\mathrm{e}^{-l\psi_\pm(\lambda)},\quad \lambda>0 \tag{6}$$

とおくと，

$$\psi_+(\lambda)+\psi_-(\lambda)=\frac{1}{u_\lambda(0,0)} \tag{7}$$

である．以上の議論から，即ち 0 における周遊に着目すれば，G 上のブラウン運動は一次元ブラウン運動や一次元拡散過程と全く同様であり，次のことも同じように示される．

補題 1 (Williams 公式). 次が成り立つ：

$$A_+^{-1}(t)=t+\eta_-(L_+(t))\quad\text{and}\quad A_-^{-1}(t)=t+\eta_+(L_-(t)). \tag{8}$$

定理 2 (二重ラプラス変換公式). $\lambda,\lambda'>0$ に対して次が成り立つ：

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda' t}\mathbb{E}_0\left[\mathrm{e}^{-\lambda A_+(t)}\right]\mathrm{d}t=\frac{\frac{\psi_+(\lambda+\lambda')}{\lambda+\lambda'}+\frac{\psi_-(\lambda')}{\lambda'}}{\psi_+(\lambda+\lambda')+\psi_-(\lambda')}. \tag{9}$$

本講演の主結果は次の定理である．

定理 3. 次が成り立つ：

$$\mathbb{P}_0\left(A_+(1)\le x\right)\asymp x^{1-d_s/2}\quad\text{as}\quad x\to 0+. \tag{10}$$

ここで，$f(x)\asymp g(x)(x\to 0[\infty])$ とは，$x\to 0[\infty]$ なるときに $f(x)=O(g(x))$ かつ $g(x)=O(f(x))$ なることをいう．

G 上のブラウン運動は自己相似性を持つ．定理 3 は，次の補題 4 と先の二重ラプラス変換公式及びスチルチェス変換に関するタウバー型定理 ([7] の Lemma 6.3) によって直接的に求められる．

補題 4. $\lambda,t>0$ に対し，

$$\varphi(\lambda,t)=\mathbb{E}_0\left[\mathrm{e}^{-\lambda A_+(t)}\right] \tag{11}$$

とおくとき，次が成り立つ：

$$\varphi(5t\lambda,1)\le\varphi(\lambda,t)\le\varphi(t\lambda/5,1). \tag{12}$$

参考文献

[1] M. T. Barlow and E. A. Perkins, Brownian motion on the Sierpiński gasket, *Probab. Th. Rel. Fields*, **79**, 543–623, 1988.

[2] M. T. Barlow, J. W. Pitman, and M. Yor, Une extension multidimentionnelle de la loi de l'arc sinus, *Séminaire de Prob.XXIII*, Lecture Notes in Math., **1372**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 294–314 1989.

[3] N. Kajino, T. Kumagai, M. Kwaśnicki, S. Watanabe and Y. Yano, Asymptotic behavior of the law of the occupation time for random walk and Brownian motion on fractals, in preparation.

[4] Y. Kasahara and Y. Yano, On a generalized arc-sine law for one-dimensional diffusion processes, *Osaka J. Math.*, **42**, 1–10, 2005.

[5] J. Lamperti, An occupation time theorem for a class of stochastic processes, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **88**, 380–387, 1958.

[6] S. Watanabe, Generalized arc-sine laws for one-dimensional diffusion processes and random walks, *Stochastic analysis* (Ithaca, NY, 1993), 157–172, *Proc. Sympos. Pure Math.*, **57**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.

[7] S. Watanabe, K. Yano and Y. Yano, A density formula for the law of time spent on the positive side of one-dimensional diffusion processes, *J. Math. Kyoto Univ.*, **45**, 781–806, 2005.