Loop-erased random walks on planar graphs

鈴木　裕行
東京工業大学理工学研究科

1　Loop-erased random walk

$\omega = (\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n)$ に対し、$s_0 := \max\{k \geq 0 : \omega_0 = \omega_k\}, s_m := \max\{k \geq 0 : \omega_{s_{m-1}+1} = \omega_k\}, l := \min\{m \geq 0 : \omega_{s_m} = \omega_n\}$ とする。ω の loop erasure $L[\omega]$ を次のように定義する。

$$L[\omega] := (\omega_{s_0}, \ldots, \omega_{s_l})$$

ω の time-revarsal を $\omega^* := (\omega_n, \omega_{n-1}, \ldots, \omega_0)$ と表す。
X を可算集合とし、S_n を X 上の Markov 連鎖とする。D を S の部分集合とし、D からの脱出時刻を $\tau_D := \min\{n \geq 0 : S_n \notin D\}$ とする。

定理 1.1
S_n は次を満たす X 上の不変測度 π をもつとする。

$$0 < \pi(x) < \infty \quad \text{for all } x \in X$$

このとき、$\omega = (\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n)$ に対し、

$$\mathbb{P}(L[(S_0, S_1, \ldots, S_{\tau_D})] = \omega) = \mathbb{P}(L[(S_0, S_1, \ldots, S_{\tau_D})^*]^* = \omega)$$

が成立する。

2　Schramm-Loewner evolutions

$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ とする。B_t を 1 次元 Brown 運動（但し、B_0 は $[0, 2\pi)$ 上一様分布とする）とし、次の初期値問題の解を radial Schramm-Loewner evolutions(SLE_κ) という。

$$\frac{\partial}{\partial t} g_t(z) = -g_t(z) \frac{g_t(z) + e^{i\sqrt{\kappa}B_t}}{g_t(z) - e^{i\sqrt{\kappa}B_t}}, \quad g_0(z) = z$$

SLE_κ を生成する $\partial\mathbb{D}$ 上から出発し原点に向かう曲線を radial SLE_κ 曲線と呼ぶ。SLE_κ 曲線はいくつかの 2 次元離散格子モデルの連続極限として現れるが、$\kappa = 2$ の場合は Loop-erased random walk (LERW) と対応していることが知られている。

定理 2.1 ([2])
S_n を正方格子（または三角格子）上の原点から出発する simple random walk とする。このとき、$L[(S_0, S_1, \ldots, S_{\tau_\mathbb{D}})]^*$ の連続極限は radial SLE_2 曲線になる。

この結果の拡張として次が知られている。

定理 2.2 ([3])
G を既約な重みつき有向平面グラフとし、S_n を G 上に自然に定まる random walk とする。$(S_0, S_1, \ldots, S_{\tau_\mathbb{D}})$ の連続極限が原点から出発する 2 次元 Brown 運動になるならば、$L[(S_0, S_1, \ldots, S_{\tau_\mathbb{D}})^*]$ の連続極限は radial SLE_2 曲線になる。

SLE_κ 曲線は領域 Markov 性によって特徴付けられるが、SLE_κ 曲線と LERW は向きが異なるため、自然に領域 Markov 性をもつ $L[(S_0, S_1, \ldots, S_{\tau_\mathbb{D}})^*]$ を定理 2.2 では考えている。しかし、LERW の univarsality を示すという点からは $L[(S_0, S_1, \ldots, S_{\tau_\mathbb{D}})]^*$ を考えるほうが自然なので、その点を定理 1.1 を用いて改良し次を得た。

定理 2.3
G を既約な重みつき有向平面グラフとし、S_n を G 上に自然に定まる random walk とする。S_n は定理 1.1 の仮定を満たすとする。$(S_0, S_1, \ldots, S_{\tau_\mathbb{D}})$ の連続極限が原点から出発する 2 次元 Brown 運動になるならば、$L[(S_0, S_1, \ldots, S_{\tau_\mathbb{D}})]^*$ の連続極限は radial SLE_2 曲線になる。

参考文献

[1] G.F. Lawler. Loop-erased random walk. In Perplexing problems in probability, 197-217. Birkhäusser Boston, Boston, MA, 1991.

[2] G.F. Lawler, O. Schramm, W. Werner. Conformal invariance of planar loop-erased random walks and uniform spanning trees, Ann. Prob. 32, 939-996, 2004.

[3] A. Yadin and A. Yehudayoff, Loop-erased random walk and Poisson kernel on planar graphs, Ann. Prob. to appear.