Random spanning trees on the Sierpiński gasket

篠田　正人（奈良女子大学理学部）

$G=(V,E)$ が連結な有限グラフであるとする。辺集合 E の部分集合 E' によって定まる G の部分グラフ $G'=(V,E')$ が spanning tree であるとは、G' が連結であってかつ cycle を含まないことを言う。図 1 のように、有限グラフ列 $\{G_n=(V_n,E_n)\}_{n=0,1,2,\ldots}$ の極限図形として 2 次元 pre-Sierpiński gasket $G_\infty=(V_\infty,E_\infty)$ を定義する。我々の目的は、pre-Sierpiński gasket における random spanning tree measure を以下の手順で構成することにある。

- pre-Sierpiński gasket G_∞ の有限部分グラフ G_n における spanning tree のある確率分布 $\mathbf{P}_n$ を与え、
- $G_n \to G_\infty$ としたときの極限測度 $\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}_n=\mathbf{P}_\infty$ の存在を示す。

G_n の spanning tree 全体の集合を $\mathbf{T}_n$ で表す。$\mathbf{T}_n$ の元をランダムに選ぶ方法として、次の 2 つが重要である。

(Uniform spanning tree) $\mathbf{T}_n$ の元を一様分布に従って選ぶ。

(Minimal spanning tree) G_n の各辺 $e\in E_n$ に $[0,1]$ 一様分布に従う独立な確率変数 X_e を与え、X_e の和が最小となるような $\mathbf{T}_n$ の元を選ぶ。

これらの確率分布の極限として G_∞ 上の random spanning tree measure を構成する方法は、$\mathbb{Z}^d$ などにおける構成法と同様のものである。ただし、有限部分グラフで spanning tree についての確率分布を指定しても、その極限分布から得られる無限グラフ上の configuration は連結とは限らないことに注意しておく。例えば、$\mathbb{Z}^d$、$d\geq 5$ における uniform spanning tree では極限分布で連結とはならない（Pemantle[P91]）。一般的に極限分布を spanning tree でなく spanning forest と称しているのはこのためである。uniform spanning tree (forest) については Benjamini-Lyons-Peres-Schramm[BLPS01] などを、minimal spanning tree (forest) については Lyons-Peres-Schramm[LPS06] などを参照されたい。

ここでは特に pre-Sierpiński gasket での uniform spanning tree について考える。$\mathbf{T}_n$ の元の個数は下記の通り知られている。

Theorem 1 (Teufl-Wagner[TW06],Chang-Chen-Yang[CCY07])

$$|\mathbf{T}_n| = 3\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{n}{2}}\left(2^{\frac{1}{2}}3^{\frac{3}{4}}5^{\frac{1}{4}}\right)^{3^n-1}.$$

$\mathbf{T}_n$ の元の個数がわかっているため、$\mathbf{T}_n$ 上の一様分布 $\mathbf{P}_n$ を $\omega\in\mathbf{T}_n$ に対して $\mathbf{P}_n(\{\omega\})=|\mathbf{T}_n|^{-1}$ として具体的に定めることができる。$\mathbf{T}_n$ の各要素 ω は $\mathbf{\Omega}_n=\{0,1\}^{E_n}$ の元とみなす。ここで、$\omega\in\mathbf{T}_n, e\in E_n$ に対して $\omega(e)=1$（resp.$=0$）であるとは、spanning tree ω に辺 e が含まれている（resp. 含まれていない）ことを意味している。

一般に、有限グラフにおける spanning tree を一様分布に従って選ぶアルゴリズムとして、Wilson の方法（Wilson[W96]）がよく知られている。このアルゴリズムによれば、G_n の spanning tree を一様分布に従って選んだときこの tree 上での O から a_n への self-avoiding path は、O を出発し a_n に到達するまでの loop-erased simple random walk の軌跡と考えることができる。この path の長さを $L_n(\omega)$ と表すとき、$n\to\infty$ での漸近挙動として以下のことが成り立つ。（$f(n)\sim g(n)$ とは $\lim_{n\to\infty}f(n)/g(n)=1$ であるものとする）

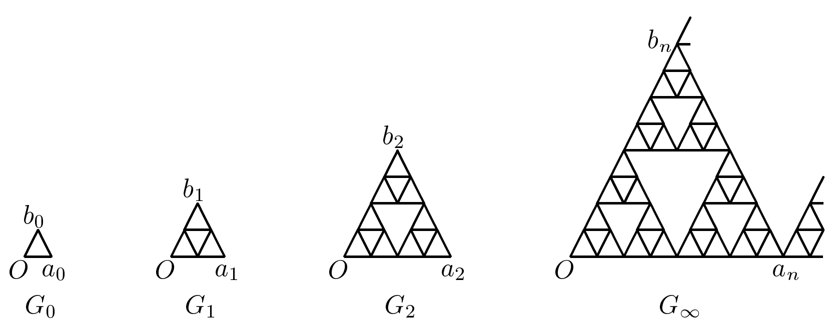

図 1: 2 次元 pre-Sierpiński gasket

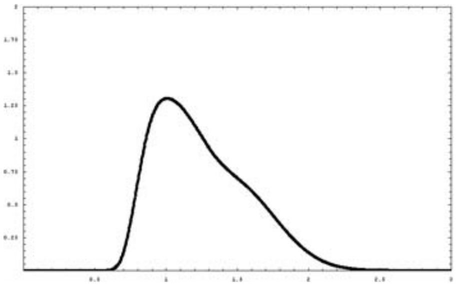

図 2: L_n/α^n の密度関数の概形

Theorem 2

$$\mathbf{E}_n L_n \sim K_1 \alpha^n, \qquad \mathbf{Var}_n L_n \sim K_2 \alpha^{2n}.$$

ここで $\mathbf{E}_n, \mathbf{Var}_n$ は $\mathbf{P}_n$ に関する期待値と分散を表し、$\alpha = \dfrac{20+\sqrt{205}}{15} = 2.28785\cdots$, $K_1 = \dfrac{82+5\sqrt{205}}{123} = 1.24869\cdots$, $K_2 = \dfrac{164809+7667\sqrt{205}}{2593332} = 0.10588\cdots$ である。

Theorem 3 $(0,\infty)$ で定義されたある非負関数 f が存在して、$0<a<b<\infty$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_n\left(a < \frac{L_n(\omega)}{\alpha^n} \le b\right) = \int_a^b f(x)dx.$$

すなわち、$\mathbf{T}_n$ 上の一様分布に従って得られる O から a_n への path の長さは α^n のオーダーであり、$n\to\infty$ のときの path の連続極限の Hausdorff 次元は $(\log\alpha)/(\log 2) = 1.19399\cdots$ であることを示している。なお、f の概形は図 2 のようになる。

$\mathbf{P}_n$ の極限として $\mathbf{\Omega}_\infty = \{0,1\}^{E_\infty}$ 上の測度 $\mathbf{P}_\infty$ を構成する。具体的に言えば、E_∞ の有限部分集合 F に対して $F \subset E_N$ となるように N を選び、任意の $\omega_F \in \{0,1\}^F$ についての $\mathbf{\Omega}_\infty$ の cylinder event $\{\omega \in \mathbf{\Omega}_\infty : \omega|_F = \omega_F\}$ の確率を（ここで $\omega|_F$ は ω を F 上に制限したものを表す）

$$\mathbf{P}_\infty(\omega|_F = \omega_F) = \lim_{k\to\infty} \mathbf{P}_{N+k}(\omega|_F = \omega_F) \tag{1}$$

と定める。このとき (1) の右辺の極限値は確かに存在し、$\mathbf{P}_\infty$ を $\mathbf{\Omega}_\infty$ 上の確率測度として定めることができる。以下、$\omega \in \mathbf{\Omega}_\infty$ を $\mathbf{P}_\infty$ に従って選び、G の部分グラフ $G(\omega) = (V_\infty, E(\omega))$ が $E(\omega) = \{e \in E_\infty : \omega(e) = 1\}$ の意味で定まるものとすると、$\mathbf{P}_\infty - a.s.\omega$ で $G(\omega)$ は連結であり、$\mathbf{P}_\infty - a.s.\omega$ で $G(\omega)$ は cycle を持たないこともわかる。このことから、$\mathbf{P}_\infty$ は 2 次元 pre-Sierpiński gasket 上の uniform spanning tree measure と呼んで差し支えないと言える。このときの spanning tree では、$\mathbf{P}_\infty - a.s.\omega$ で、O を出発する infinite self-avoiding path が $G(\omega)$ 上一意的に定まる。

Theorem 4 上のように定まる self-avoiding path を $W(\omega) = (W_0(\omega) = O, W_1(\omega), W_2(\omega), \ldots)$ とするとき、任意の $s>0$ に対して n によらない定数 $0 < K_3 \le K_4 < \infty$ が存在して

$$K_3 n^{s\nu} \le \mathbf{E}_\infty |W_n|^s \le K_4 n^{s\nu},$$

$\nu = (\log 2)/(\log\alpha) = 0.83752\cdots$ が成り立つ。

pre-Sierpiński gasket 上の self-avoiding path の 2 乗平均変位の指数が $\nu = 0.798\cdots$ である（Hattori-Kusuoka[HK92]）ことと比べると、uniform spanning tree measure によって得られる infinite self-avoiding path（loop-erased random walk に対応する path）のほうが真に広がりやすくなっており、別々の universality class に属していることを示している。これは、$\mathbb{Z}^2$ における self-avoiding walk の指数が $\frac{3}{4}$ と予想され（例えば Madras-Slade[MS93] 参照）、loop-erased random walk の指数が $\frac{4}{5}$ である（Kenyon[K00]）こととも対応している。

同様の考察は 3 次元 pre-Sierpiński gasket（定義については服部 [H04] などを参照）においても行うことができる。このときの spanning tree の個数も [CCY07] で知られており、uniform spanning tree について具体的に計算を実行すると $G_n^{(3)}$ の 2 頂点間の距離 $L_n^{(3)}$ の期待値は $\approx (\alpha_3)^n$, $\alpha_3 = 2.55995\cdots$ となる。このときにできる spanning tree 内の infinite self-avoiding path の 2 乗平均変位の指数は $(\log 2)/(\log \alpha_3) = 0.73739\cdots$ となり、通常の self-avoiding walk での値が $0.6740\cdots$ である（Hattori-Hattori-Kusuoka[HHK93]）ことと比べ、やはり真に広がりやすくなっていることがわかる。表 1 に 2 乗平均変位の指数についてまとめる。

	$\mathbb{Z}^2$	2 次元 S.G.	3 次元 S.G.
Random Walk	1/2	$0.430\cdots$	$0.386\cdots$
Self-Avoiding Walk	3/4*	$0.798\cdots$	$0.674\cdots$
Loop-Erased Random Walk	4/5	$\underline{0.837\cdots}$	$\underline{0.737\cdots}$

表 1：2 乗平均変位の指数（*は予想の値）

なお、講演では 2 次元 pre-Sierpiński gasket における minimal spanning tree の構成にも触れ、uniform spanning tree との主な相違点について言及する予定である。

References

[BLPS01] Benjamini,I., Lyons,R., Peres,Y. and Schramm,O. (2001) Uniform spanning forests, *Ann. Probab.* **29**, 1-65.

[CCY07] Chang,S.-C., Chen,L.-C. and Yang,W.-S. (2007) Spanning trees on the Sierpinski gasket, *J. Statist. Phys.* **126**, 649-667.

[HHK93] Hattori,K., Hattori,T. and Kusuoka.S. (1993) Self-avoiding paths on the three dimensional Sierpiński gasket, *Publ. Res. Inst. Math.Sci.* **29**, 455-509.

[HK92] Hattori,T. and Kusuoka.S. (1992) The exponent for mean square displacement of self-avoiding random walk on Sierpinski gasket, *Probab. Theory Relat. Fields* **93**, 273-284.

[H04] 服部哲弥 (2004) ランダムウォークとくりこみ群, 共立出版.

[K00] Kenyon,R. (2000) The asymptotic determinant of the discrete Laplacian, *Acta Math.* **185**, 239-286.

[LPS06] Lyons,R., Peres,Y. and Schramm,O. (2006) Minimal spanning forests, *Ann. Probab* **34**, 1665-1692.

[MS93] Madras,N. and Slade,G. (1993) *The self-avoiding walk*, Birkhäuser, Boston.

[P91] Pemantle,R. (1991) Choosing a spanning tree for the integer lattice uniformly, *Ann. Probab.* **19**, 1559-1574.

[TW06] Teufl,E. and Wagner,S. (2006) The number of spanning trees of finite Sierpiński graphs, In *Fourth Colloquium on Mathematics and Computer Science Algorothms, Trees, Combinatorics and Probabilities*, DMTCS proc. AG 2006, 411-414.

[W96] Wilson,D.B. (1996) Generating random spanning trees more quickly than the cover time. In *Proceedings of the Twenty-Eighth Annual ACM Symposium on the Theory of Computing* 296-303. ACM, New York.