

### 3 階確率擬過程の有限区間からの最小脱出時間

2010 年 12 月 20 日 下山 由貴子 (首都大理工)

#### I. 3 階確率擬過程

3 階熱型方程式

$$\partial_t u = \partial_x^3 u, \dots (*), \quad \partial_t u = -\partial_x^3 u, \dots (**) \quad t > 0, x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

にたいし, (\*), (\*\*) の基本解を推移確率として構成した ‘path 空間上の符号付き確率測度\*1’ を  $\mathbf{P}^+$ ,  $\mathbf{P}^-$  で表し, それに対応する確率擬過程をそれぞれ  $SPP_3^+$ ,  $SPP_3^-$  と呼ぶ.

$\mathbb{D}$  を *Cádlág* 関数の全体とする.  $w \in \Omega \equiv \mathbb{D}$  にたいし, 階段関数  $w^{(n)} \in \Omega$  を

$$w^{(n)}(t) \equiv w(t_k^{(n)}) \quad \text{if} \quad t_k^{(n)} \leq t < t_{k+1}^{(n)} \quad (2)$$

とおく. ここで  $n$  は自然数,

$$t_k^{(n)} \equiv k/2^n \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

**定義 1** ([2]). 確率擬過程  $SPP_3^+$ ,  $SPP_3^-$  の  $(-\infty, 0]$  の first hitting time を, 次で定義する:

$$\tau_0(w^{(n)}) \equiv \begin{cases} t_{k+1}^{(n)} & \text{if } w^{(n)}(t_j^{(n)}) \geq 0 \text{ for } 0 \leq j \leq k \\ & \text{and if } w^{(n)}(t_{k+1}^{(n)}) < 0 \\ \infty & \text{if such } k \text{ does not there.} \end{cases} \quad (4)$$

**定理 2** ([1]). (i)  $SPP_3^+$  の “first hitting time and place” の同時分布は, 次で与えられる:

$$\mathbf{P}_x^+[\tau_0(w) \in [0, t], X(\tau_0(w)) \in dy] = \mu_K^{3,+}(t, x) \delta_0(y) dy - \mu_J^{3,+}(t, x) \delta'_0(y) dy \quad (5)$$

ただし,

$$\begin{aligned} \mu_K^{3,+}(t, x) &= 1 - \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty da \frac{e^{-at}}{a\sqrt{3}} \left( \exp\{-a^{1/3}x\} + 2 \exp\{\frac{a^{1/3}x}{2}\} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a^{1/3}x - \frac{\pi}{6}\right) \right), \\ \mu_J^{3,+}(t, x) &= x - \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty da \frac{e^{-at}}{a^{4/3}\sqrt{3}} \left( \exp\{-a^{1/3}x\} - 2 \exp\{\frac{a^{1/3}x}{2}\} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a^{1/3}x + \frac{\pi}{3}\right) \right). \end{aligned} \quad (6)$$

(ii) 一方,  $SPP_3^-$  の “first hitting time and place” の同時分布は, 次で与えられる:

$$\mathbf{P}_x^-[\tau_0(w) \in [0, t], X(\tau_0(w)) \in dy] = \mu_K^{3,-}(t, x) \delta_0(y) dy, \quad t > 0, x \geq 0,$$

ただし,

$$\mu_K^{3,-}(t, x) = 1 - \frac{3}{\pi} \int_0^\infty da \exp\{-a^3t - \frac{ax}{2}\} \frac{1}{a} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}ax\right). \quad \diamond \quad (7)$$

**注意 3.**  $\delta_0(y)$  は 0 に単位質量をもつ delta 関数で, monopole と呼ぶ. 一方,  $\delta'_0(y)$  は delta 関数の超関数微分で, dipole と呼ぶ. これらは, それぞれの擬過程  $SPP_3^+$ ,  $SPP_3^-$  で出現し, 次のような運動をする:

\*1 実際には, この基本解が Schwartz class に属さないなど非常に扱いにくいので, 減衰項を含む 3 階熱型方程式  $\partial_t u = \pm \partial_x^3 u + 3\varepsilon \partial_x^2 u \pm 3\varepsilon^2 \partial_x u$ , ( $\varepsilon$  は正定数) で (\*) を近似してから,  $SPP_3^+$ ,  $SPP_3^-$  を構成する, [2].

	monopole	dipole
$BM$	出現, +, - 両方向に移動	出現しない
$SPP^{(3)}(+)$	出現し +, - 両方向に移動	出現, - 方向にのみ移動
$SPP^{(3)}(-)$	出現し +, - 両方向に移動	出現, + 方向にのみ移動

$SPP_3^+$ ,  $SPP_3^-$  は first hitting time and place に関して, 強マルコフ性を持っている:

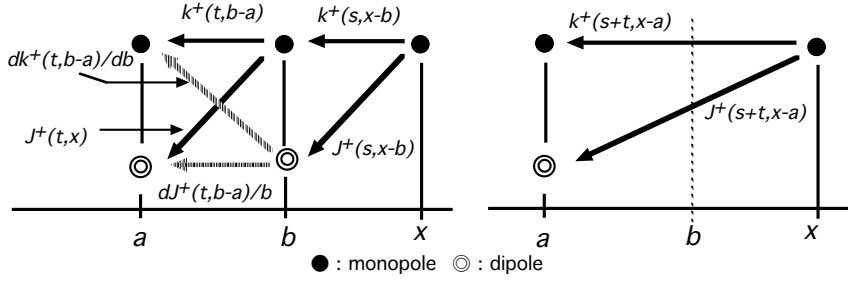
**定理 4** (Strong Markov property).  $a < b < x$ ,  $f$  を  $C^1$  class function とすると,

$$\begin{aligned} & \int_{z \in \mathbb{R}^1} \int_{s=0}^t \int_{y \in \mathbb{R}^1} \mathbf{P}_x^+[\tau_b(w) \in ds, X(\tau_b, w) \in dy] \times \mathbf{P}_y^+[\tau_a(w) \in [s, t], X(\tau_a, w) \in dz] f(z) \\ &= \int_{z \in \mathbb{R}^1} \mathbf{P}_x^+[\tau_a(w) \in [0, t], X(\tau_a, w) \in dz] f(z), \end{aligned} \quad (8)$$

また

$$\begin{aligned} & \int_{z \in \mathbb{R}^1} \int_{s=0}^t \int_{y \in \mathbb{R}^1} \mathbf{P}_x^-[\tau_b(w) \in ds, X(\tau_b, w) \in dy] \times \mathbf{P}_y^-[\tau_a(w) \in [s, t], X(\tau_a, w) \in dz] f(z) \\ &= \int_{z \in \mathbb{R}^1} \mathbf{P}_x^-[\tau_a(w) \in [0, t], X(\tau_a, w) \in dz] f(z). \end{aligned} \quad (9)$$

が成立.



## II. 区間 $[0, 1]$ からの最小脱出時間

有限区間  $[0, 1]$  からの脱出が左側の境界点  $0$  である確率を次で定義する:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}_x^+[\tau_0 \in dt, \omega(\tau_0) \in db, \tau_0 < \tau_1] \\ &= \mathbf{P}_x^+[\tau_0 \in dt, \omega(\tau_0) \in db] - \left\{ \int_0^t \int \mathbf{P}_x^+[\tau_1 \in ds, \omega(\tau_1) \in dc] \mathbf{P}_c^+[\tau_0 \in dt - s, \omega(\tau_0) \in dc_2] \right\} \\ &+ \left\{ \int_0^t \int \mathbf{P}_x^+[\tau_0 \in ds_2, \omega(\tau_0) \in dc_2] \right. \\ &\quad \times \left. \int_{s_2}^t \int \mathbf{P}_{c_2}^+[\tau_0 \in ds_1 - s_2, \omega(\tau_0) \in dc_1] \mathbf{P}_{c_1}^+[\tau_0 \in dt - s_1, \omega(\tau_0) \in db] \right\} \\ &- \left\{ \int_0^t \int \mathbf{P}_x^+[\tau_1 \in ds_3, \omega(\tau_1) \in dc_3] \int_{s_3}^t \int \mathbf{P}_{c_3}^+[\tau_0 \in ds_2 - s_3, \omega(\tau_0) \in dc_2] \right. \\ &\quad \times \left. \int_{s_2}^t \int \mathbf{P}_{c_2}^+[\tau_1 \in ds_1 - s_2, \omega(\tau_1) \in dc_1] \mathbf{P}_{c_1}^+[\tau_0 \in dt - s_1, \omega(\tau_0) \in db] \right\} \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (10)$$

ここで、形式的に (10) の級数として与えたが、それが収束しているかどうかを調べる。両辺の Fourier-Laplace 変換をとり、“有限区間  $[0, 1]$  の左側境界 0 からの最小脱出時間/場所の Fourier-Laplace 変換”

$$G_0^+(x, \lambda, \beta) \equiv \mathbf{E}_x[\exp\{-\lambda\tau_0 + i\beta\omega(\tau_0)\}, \tau_0 \leq \tau_1] \quad (11)$$

を計算すると便利である。これについて、次の結果が得られた:

**定理 5.** (11) は、 $\lambda > 0$ ,  $x \in (0, 1)$  で一様収束し、 $x$  に関して  $C^\infty$ -関数で、次の微分方程式の一意解である:

$$\begin{aligned} \partial_x^3 G_0^+ &= \lambda G_0^+, \\ G_0^+(0, \lambda, \beta) &= 1, \quad \partial_x G_0^+(0, \lambda, \beta) = i\beta, \quad G_0^+(1, \lambda, \beta) = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

### III. 区間 $[0, 1]$ のどちらの境界から脱出するか?

$SPP_3^+$  が区間  $(0, 1)$  から脱出するとき、点 0 から脱出する確率

$$\mathbf{P}_x^+[\tau_0 < \tau_1], \quad 0 < x < 1$$

を調べる。定理 5 より、 $G_0^+$  がみたす微分方程式を解くと、 $G_0^+$  の (級数表記でない) 具体的な形が得られる。これを基に、

$$\mathbf{P}_x^+[\tau_0 < \tau_1] = \lim_{\lambda \rightarrow 0} G_0^+(x, \lambda, 0)$$

として、“点 0 から脱出する確率” が求められる:

**定理 6.** (i) 区間  $[0, 1]$  からの脱出が、境界点 0 の側である確率は

$$\mathbf{P}_x^+[\tau_0 < \tau_1] = 1 - x^2, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (13)$$

(ii) 区間  $[0, 1]$  からの脱出が、境界点 1 の側である確率は

$$\mathbf{P}_x^+[\tau_0 > \tau_1] = x^2, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (14)$$

## 文献

- [1] Shimoyama, Y., On behaviors of the stochastic pseudo processes governed by third-order heat type equations, submitted.
- [2] Nishioka, K., The first hitting time and place of half-line by a biharmonic pseudo process, Japan. J. Math., **23** (1997), 235–280.