

自由正則無限分解可能分布のクラスの特徴づけと 自由半円混合の自由無限分解可能性について

佐久間 紀佳

慶應義塾大学大学院理工学研究科

訪問研究員（日本学術振興会特別研究員（PD））

12月20日 15:30～16:10

動機

自由確率論では確率変数の積に非可換性な構造を入れているため、確率変数の積の分布において確率論の場合と異なる現象がおこる。本講演では確率論における正規分布の分散混合の非可換対応を考えることにより発見された確率論と自由確率論の差異や類似性について説明し、得られた結果について述べる。

準備

本講演では \mathbb{R} 上の分布のみを考える。 \mathcal{P} を \mathbb{R} 上の確率分布全体の集合、 \mathcal{P}_+ を $[0, \infty)$ 上の確率分布全体の集合、 \mathcal{P}_s を \mathbb{R} 上の対称確率分布全体の集合とする。 \boxplus 、 \boxtimes を自由加法畳みこみおよび自由乗法畳みこみとする。これらは自由独立な確率変数の和の分布および積の分布を導く $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ および $\mathcal{P}_s \cup \mathcal{P}_+ \times \mathcal{P}_+$ 上の演算である。 w を標準半円分布とする、すなわち以下の密度 f_w をもつものとする：

$$f_w(x) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - x^2} 1_{|x| \leq 2}(x).$$

講演では解析的道具と確率論と自由確率論における無限分解可能分布を結ぶ写像であるBercovici-Pata写像について述べる。

正規分布の分散混合

標準正規分布に従う確率変数 Z とそれと独立な確率変数 V^2 を考える。積 VZ は正規分布の分散を V^2 によりランダム化したものと考えることが出来る。このような形で表現できる確率変数の分布を正規分布の分散混合と呼ぶ。この分布の無限分解可能のための十分条件として V^2 の分布が無限分解可能であれば VZ の分布も無限分解可能であることが知られている。

今回確率論における正規分布の分散混合の対応物を考えるため、自由確率論における正規分布の対応物である半円分布の混合としてある確率分布 $\rho \in \mathcal{P}_+$ が存在して、 $w \boxtimes \rho$ と

して表わされる分布のクラスを考える. I^{\boxplus} を自由無限分解可能分布全体のクラス, I_{r+}^{\boxplus} と
して確率論における $[0, \infty)$ 上の無限分解可能分布全体のクラスの Bercovici-Pata 写像に
よる像クラスとする. I_{r+}^{\boxplus} を自由正則無限分解可能分布のクラスと呼ぶ.

注意 1. このクラスは $[0, \infty)$ 上の自由無限分解可能分布すべては含まない.

主結果

定理 2. (1) $\{\mathbb{R}$ 上の対称分布 $\} \supseteq \{w \boxtimes \rho \text{ で表わされる分布 } \}$

(2) $w \boxtimes \rho \in I^{\boxplus} \Leftrightarrow \rho \boxtimes \rho \in I_{r+}^{\boxplus}$.

自由正則無限分解可能分布は Bercovici-Pata 写像により定義された. それに対してその
確率論的特徴づけとある性質を見出した.

定理 3. (1) 次の 2 条件は同値:

1. $\rho \in I_{r+}^{\boxplus}$

2. 任意の $t > 0$ に対して, $\text{supp}(\rho^{\boxplus t}) \subset [0, \infty)$.

(2) $\rho \in I_{r+}^{\boxplus} \Rightarrow \rho \boxtimes \rho \in I^{\boxplus}$

I_{r+}^{\boxplus} のクラスに入っていないが分布の台が $[0, \infty)$ に含まれるようなものを考えると, 上
の性質を満たさないような例が見つかる.

例 4. w_+ として正值標準半円分布, すなわち密度 f_{w_+} が次で与えられる分布とする:

$$f_{w_+}(x) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4x - x^2} 1_{|t-2| \leq 2}(x).$$

w_+ 自体は自由無限分解可能だが, $w_+ \boxtimes w_+$ は自由無限分解可能でない. したがって $w_+ \boxtimes w$
も自由無限分解可能でない.

注意 5. $w_+ \boxtimes w_+ \boxtimes w_+$ も自由無限分解可能でない.

参考文献

- [1] T. Hasebe and N. Sakuma. Working progress.
- [2] V. Perez-Abreu and N. Sakuma (2010). Free Infinite Divisibility of Free Multi-
plicative Mixtures of the Wigner Distribution. To appear J. Theor. Probab.
- [3] N. Sakuma (2010). On free regular infinitely divisible distributions. Submitted.