

Wiener 汎関数の正則性について

会田 茂樹

東北大学

2014年3月19日

Introduction

- Wiener 汎関数 = Wiener 空間 W 上の関数, 確率変数 $F : W \rightarrow \mathbb{R}^d$
- SDE の解, Wiener chaos, など
- $F(w)$ の $w \in W$ の関数としての連続性, 微分可能性は通常期待できない (Stochastic area の不連続性については 杉田 [17] を参照)

しかし

- 滑らかな係数を持つ SDE の解は Malliavin 解析の意味で滑らか

であり

Introduction

滑らかな係数を持つ SDE の解 $F(w) = X(t, x, w)$ について

- (1) Cameron-Martin 部分空間 H 方向に制限された写像 $h(\in H) \mapsto F(w + h) \in \mathbb{R}^d$ の連続性, 微分可能性
- (2) Skeleton と呼ばれる F の H への“制限 $\tilde{F} = F|_H$ ”, および H 上の関数の W への“確率的拡張”

などの性質が示され, 以下に応用される.

- ガウス測度の非線形変換による絶対連続性の問題
- F で定義される領域やレベル集合のある種の“位相的性質”の研究
- サポート定理

Introduction

Rough path 解析 (1990 年代 ~)

「 $X(t, x, w)$ は “ w ” の連続な汎関数と解釈できる」

で上記 (1), (2) に対するアプローチに新たな視点が与えられた. この講演では上記 (1), (2) の新旧 (?) のアプローチと反射壁 SDE の解に対する最近の講演者の研究についてお話しします。

SDE の解の H -連続性

$$dX(t, x, w) = \sigma(X(t, x, w)) \circ dw(t) + b(X(t, x, w))dt$$

$$X(0, x, w) = x \in \mathbb{R}^d,$$

ここで $w(\in W^n = C([0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n, w(0) = 0))$ は n 次元標準ブラウン運動.

Theorem 1

$\sigma, b \in C_b^\infty$ ならば $X(t, x, w)$ のあるバージョンを取ると、すべての $w \in W^n$ について

$$h(\in H) \mapsto X(t, x, w + h) \in \mathbb{R}^d$$

は C^∞ 写像になる.

証明のスケッチ

$w_N(t)$ を $w_N(kT2^{-N}) = w(kT2^{-N})$ となる折れ線近似とする. $X(t, x, w_N), J(t, x, w_N)$ を次の ODE の解とする.

$$dX(t, x, w_N) = \sigma(X(t, x, w_N))dw_N(t) + b(X(t, x, w_N))dt,$$

$$dJ(t, x, w_N) = (\partial\sigma)(X(t, x, w_N))J(t, x, w_N)dw_N(t) \\ + (\partial b)(X(t, x, w_N))J(t, x, w_N)dt$$

$$X(0, x, w_N) = x, \quad J(0, x, w_N) = I \in L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d).$$

$J(t, x, w_N) = \partial_x X(t, x, w_N)$ である.

証明のスケッチ

σ, b はコンパクトサポートを持つとする.

$\Omega = \left\{ w \in W^n \mid X(\cdot, \cdot, w_N), J(\cdot, \cdot, w_N)^{-1} \text{ はそれぞれ} \right.$
 $C([0, T] \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)), C([0, T] \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)))$
 $\left. \text{値写像として } N \rightarrow \infty \text{ で収束する。} \right\}$

- $\Omega + H \subset \Omega, \mu(\Omega) = 1$
- $X(t, x, (w + h)_N) = X(t, Z(t, x, w_N, h_N), w_N)$,
ここで $Z(t, x, w_N, h_N)$ は次の ODE の解。

$$\dot{Z}(t, x, w_N, h_N) = J^{-1}(t, Z(t, x, w_N, h_N), w_N) \cdot \partial \sigma(X(t, Z(t, x, w_N, h_N), w_N)) \dot{h}_N(t)$$

$$Z(0, x, w_N, h_N) = x.$$

証明のスケッチ

$w \in \Omega$ に対して

$$X(t, x, w) = \lim_{N \rightarrow \infty} X(t, x, w_N),$$

$$J^{-1}(t, x, w) = \lim_{N \rightarrow \infty} J^{-1}(t, x, w_N)$$

と定めると $X(t, x, w + h)$ ($w \in \Omega, h \in H$) は

$$X(t, x, w + h) = X(t, Z(t, x, w, h), w)$$

$$\dot{Z}(t, x, w, h) = J^{-1}(t, Z(t, x, w, h), w)$$

$$\cdot \partial \sigma (X(t, Z(t, x, w, h), w)) \dot{h}(t)$$

$$Z(0, x, w, h) = x$$

を満たし, $h \mapsto X(t, x, w + h)$ は C^∞ -写像とわかる。

楠岡の定理 [8]

$$B^\delta = \left\{ w \in C([0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n) \mid w(0) = 0, \right.$$

$$\left. \|w\|_{B^\delta} := \left(\iint_{[0, T]^2} \frac{|w(u) - w(v)|^2}{|u - v|^{1+2\delta}} dudv \right)^{1/2} < \infty \right\}$$

$1/4 < \alpha < 1/2$, $\delta = \frac{1}{2} + \alpha$ とする。

$$B^{(1/2)+\alpha} \subset C^\alpha, \quad B^{(1/2)+\alpha} \subset V^{((1/2)+\alpha)^{-1}},$$

ここで V^p は p -variation 有限な連続なパス全体。

$$\|w\|_{V^p, [s, t]} = \sup_{\Delta = \{s=t_0 < \dots < t_N=t\}} \left(\sum_{k=1}^N |w(t_k) - w(t_{k-1})|^p \right)^{1/p}.$$

楠岡の定理 [8]

Theorem 2

$1/4 < \alpha < 1/2$, $\delta = \frac{1}{2} + \alpha$ とする。可測写像 $\tilde{X} : \mathbb{R}^d \times W^n \rightarrow C^\alpha([0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d)$ で次を満たすものがある。

- (1) $X(t, x, w) := \tilde{X}(x, w)(t)$ は SDE の解。
- (2) 任意の $w \in W^n$ に対して, 写像 $(x, h) \in \mathbb{R}^d \times B^\delta \rightarrow \tilde{X}(x, w + h) \in C^\alpha([0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d)$ は C^∞ .

$$H^1 \subset B^{(1/2)+\alpha} \subset C^\alpha, \quad B^{(1/2)+\alpha} \subset V^{((1/2)+\alpha)^{-1}},$$

Young 積分 [4], [11]

$f \in V^p([0, T] \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d)), g \in V^q([0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n)$
のとき

$$\left| \int_s^t (f(r) - f(s)) dg(r) \right| \leq \frac{1}{1 - 2^{1-\theta}} \|f\|_{V^p, [s, t]} \|g\|_{V^q, [s, t]},$$

ここで $\theta = (1/p) + (1/q) > 1$,

$$\|f\|_{V^p, [s, t]} = \sup_{\Delta = \{s=t_0 < \dots < t_N=t\}} \left(\sum_{k=1}^N |f(t_k) - f(t_{k-1})|^p \right)^{1/p}.$$

Theorem 2 の状況では $p = \frac{1}{\alpha}$, $q = \left(\frac{1}{2} + \alpha\right)^{-1}$ が使われる。

Young 積分による ODE [4], [8]

$1/4 < \alpha < 1/2$ とする.

$W(t, x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d)$ ($(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$) が

$\max_{0 \leq t \leq T} \|W(t, \cdot)\|_{C^1_b} < \infty$, $\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \|W(\cdot, x)\|_{C^\alpha} < \infty$ を満たすとする. Young 積分方程式 ▶ $Z(t, x, w, h)$ の満たす方程式

$$Z(t, x, h) = x + \int_0^t W(s, Z(s, x, h)) dh(s) \quad (1)$$

に一意的に解が存在し, 写像

$h \in B^{(1/2)+\alpha} \mapsto Z(\cdot, x, h) \in C^\alpha$ は連続である.

- $\alpha + \frac{1}{2} + \alpha > 1$
- $\|h\|_{V^{(1/2+\alpha)^{-1}}, [s, t]} \leq C(h)(t - s)^\alpha$.

Rough path [4], [11]

$2 \leq p < 3$ とする.

$X_{s,t} = (X_{s,t}^1, X_{s,t}^2) \in \mathbb{R}^n \oplus (\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n)$ ($0 \leq s \leq t \leq T$) が \mathbb{R}^n 上の p -rough path とは

- (1) $(s, t) \mapsto X_{s,t}$ は連続写像.
- (2) $\|X^i\|_{V^{p/i}, [0, T]} < \infty$ ($i = 1, 2$) すなわち, X^i の p/i -variation norm は有限.
- (3)
$$\begin{aligned} X_{s,u}^2 &= X_{s,t}^2 + X_{t,u}^2 + X_{s,t}^1 \otimes X_{t,u}^1, \\ X_{s,u}^1 &= X_{s,t}^1 + X_{t,u}^1 \quad (0 \leq s \leq t \leq u \leq T). \end{aligned}$$

p -rough path の空間 $\Omega_p(\mathbb{R}^n)$ は (3) の性質を除いて得られる完備距離を持つ線形空間の部分集合.

Brownian rough path

$w \in W^n$ を n 次元標準ブラウン運動とする.

$$(w_N)_{s,t}^1 = (w_N)_t - (w_N)_s, \quad (w_N: \text{折れ線近似}),$$

$$(w_N)_{s,t}^2 = \int_s^t ((w_N)_r - (w_N)_s) \otimes d(w_N)_r.$$

と定める. $((w_N)_{s,t}^1, (w_N)_{s,t}^2)$ は p -rough path.

$$\Omega = \left\{ w \in W^n \mid (w_N)^i \text{ は } p/i\text{-variation norm} \right.$$

に関して極限を持つ } とおき $w \in \Omega$ に対して

$w_{s,t}^i := \lim_{N \rightarrow \infty} (w_N)_{s,t}^i$ を Brownian rough path という.

Brownian rough path

- $\bar{w}_{s,t} = (w_{s,t}^1, w_{s,t}^2)$ ($w \in \Omega$) と書く.
- $\Omega + H \subset \Omega$,
- $h \mapsto \overline{w + h}$ は H から $\Omega_p(\mathbb{R}^n)$ 値写像として連続.
- $(1/4) < \alpha < (1/2)$ とする. $h \in B^{(1/2)+\alpha}$ とする.
1/ α -rough path $X_{s,t}$ に対して 1-st level path が
 $X_{s,t}^1 + h_t - h_s$ である 1/ α -rough path $T_h(X)$ を定義
できる.

$$h(\in B^{(1/2)+\alpha}) \mapsto T_h(X)(\in \Omega_{1/\alpha}(\mathbb{R}^n))$$

は連続写像.

Rough differential equation

$(X_{s,t}^1, X_{s,t}^2)$: p -rough path on \mathbb{R}^n .

$\sigma \in C^1(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d))$ とする. \mathbb{R}^d 上の連続なパス $y(t)$ ($0 \leq t \leq T$) が rough differential equation:

$$dy(t) = \sigma(y(s))dX_s, \quad y(0) = y_0$$

の解であるとは適当な control function* $\omega(s, t)$ と $\varepsilon > 0$ が存在して, $y(0) = y_0$ かつ

$$\begin{aligned} & \left| y(t) - y(s) - \sigma(y(s))X_{s,t}^1 - (D\sigma)(y(s))(\sigma(y(s))X_{s,t}^2) \right| \\ & \leq \omega(s, t)^{1+\varepsilon} \quad 0 \leq s \leq t \leq T. \end{aligned}$$

* $(s, t) \mapsto \omega(s, t)$ は連続, $\omega(s, t) + \omega(t, u) \leq \omega(s, u)$ $0 \leq s \leq t \leq u \leq T$.

連続性定理

Theorem 3

$\sigma \in C_b^3$ のとき, rough differential equation に一意解 $y(t, x, X)$ が存在し,
 $(x, X) \in (\mathbb{R}^d \times \Omega_p(\mathbb{R}^n)) \mapsto y(\cdot, x, X) \in V^p$ は連続写像である.

Proposition 4

$X_{s,t}$ が Brownian rough path $\bar{w}_{s,t}$ のとき $y(t, x, \bar{w})$ は Stratonovich SDE
 $dX(t, x, w) = \sigma(X(t, x, w)) \circ dw_t, X(0, x, w) = x$ の解である.

$h \mapsto \overline{w + h}$ の連続性 $\implies h \mapsto \overline{y(t, x, w + h)}$ は連続.

サポート定理

SDE $dX(t, x, w) = \sigma(X(t, x, w)) \circ dw(t)$ の解
 $X(\cdot, x, w) \in C([0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d)$ の分布 P_x の位相的台
 $\text{Supp}(P_x)$ について

$$\text{Supp}(P_x) = \overline{\{X(\cdot, x, h) \mid h \in H\}}.$$

これは, Stroock-Varadhan のサポート定理と呼ばれる.

$\text{Supp}(P_x) \subset \overline{\{X(\cdot, x, h) \mid h \in H\}}$ の証明 :

$\lim_{n \rightarrow \infty} \|X(\cdot, x, w_N) - X(\cdot, x, w)\|_{V^p} = 0$ ($w \in \Omega$) から従う.

$\text{Supp}(P_x) \supset \overline{\{X(\cdot, x, h) \mid h \in H\}}$ の証明 : 工夫が必要

$h \in H$ とする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} P(\|X(\cdot, x, w) - X(\cdot, x, h)\|_\infty < \varepsilon \mid \|w - h\|_\infty < \delta) = 0$$

から従う.

Brownian rough path \bar{w} の連続性定理を用いる証明:

- \bar{w} の分布の台 = $\overline{\{h \mid h \in H\}}$.
- $\bar{w} \mapsto y(\cdot, x, \bar{w}) \in C([0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d)$ は連続, よって
- $\text{Supp}(P_x) = \overline{\{y(\cdot, x, \bar{h})\}} = \overline{\{X(\cdot, x, h) \mid h \in H\}}$.
- $\lim_{\delta \rightarrow 0} P(\|\bar{w} - \bar{h}\|_{\Omega_p(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon \mid \|w - h\|_\infty < \delta) = 0$ と連続性定理からも従う (Friz-Lyons-Stroock).
- サポートの決定には有限次元部分の条件付きを用いるアイデア (Aida-Kusuoka-Stroock) もある.

- Polish 空間 E 値 Wiener 汎関数 $F : W^n \rightarrow E$
- $P_N : W^n \rightarrow W^n$, $P_N w = w_N$ (折れ線近似) とする.
- 分解 $W^n = W_N^n \times (W_N^n)^\perp$ により
 $F(w) = F(w_N, w_N^\perp) : W_N^n \times (W_N^n)^\perp \rightarrow E$ と見る. 適
 当な可測写像 $\hat{F} : W_N^n \times (W_N^n)^\perp \rightarrow E$ が存在し,
 - $\hat{F}(w_N, w_N^\perp) = F(w)$ μ -a.s. w .
 - $\xi \in W_N^n \mapsto \hat{F}(\xi, \cdot) \in L^0((W_N^n)^\perp, E, \mu_N^\perp)$ は連続写像
- 連続写像 $\tilde{F} : H \rightarrow E$ が存在し, $\forall \varepsilon > 0, \forall h \in H$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu \left(\{w \in W^n \mid |\tilde{F}(w_N) - F(w)| > \varepsilon\} \right) = 0,$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu_N^\perp \left(\{\eta \in (W_N^n)^\perp \mid |\hat{F}(h_N, \eta) - \tilde{F}(h)| > \varepsilon\} \right) = 0.$$
- Support of the law of $F = \overline{\{\tilde{F}(h) \mid h \in H\}}$.

反射壁 SDE with normal reflection

- $w \in W^n$: n 次元標準ブラウン運動,
 $\mathcal{F}_t = \sigma(\{w_s\}; 0 \leq s \leq t) \vee \mathcal{N}$.
- $\sigma \in C_b^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d))$,
- $b \in C_b^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$.
- $D \subset \mathbb{R}^d$: 領域

\bar{D} 上の反射壁 SDE を考える :

$$dY(t) = \sigma(Y(t)) \circ dw(t) + b(Y(t))dt + d\Phi(t) \quad (\star)$$

$$Y(0) = y_0 \in \bar{D}, \quad Y(t) \in \bar{D} \quad 0 \leq t \leq T.$$

反射壁 SDE with normal reflection

\mathcal{F}_t -適合連続確率過程 $Y(t)$ と \mathcal{F}_t -適合連続有界変動過程 $\Phi(t)$ が反射壁 SDE (★) の解とは次を満たすときに言う：

$$Y(t) = y_0 + \int_0^t \sigma(Y(s)) \circ dw(s) + \int_0^t b(Y(s)) ds + \Phi(t)$$
$$Y(t) \in \bar{D}, \quad 0 \leq t \leq T$$

$$\Phi(t) = \int_0^t \mathbf{1}_{\partial D}(Y(s)) n(s) d\|\Phi\|_{[0,s]},$$

$n(s)$ は $Y(s) \in \partial D$ における内向き単位法線ベクトル。
 $\|\Phi\|_{[s,t]}$ は $\Phi(u)$ ($s \leq u \leq t$) の全変動を表す。

Skorohod 方程式

- $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^d$
- $\sigma = I, b = \mathbf{0}$

すなわち, 反射壁 SDE

$$Y(t) = w(t) + \Phi(t), \quad w(0) \in \bar{D}$$

は Skorohod 方程式であり, すべての連続な $w(t)$ について一意的な解 $Y(t)$ が存在するとき写像 $\Gamma : w \mapsto Y$ は Skorohod 写像と呼ばれる. また, $L : w \mapsto \Phi$ と写像 L を定める.

反射壁 SDE as Ito SDE

Skorohod 写像 Γ が定まるとき, SDE (★) の解 $Y(t)$ は Ito SDE

$$\begin{aligned}dZ(t) &= \sigma((\Gamma Z)(t)) \circ dw(t) + b((\Gamma Z)(t))dt, \\Z(0) &= y_0\end{aligned}$$

の解 Z を用いて, $Y(t) = (\Gamma Z)(t)$ と表される.

Remark 5

1次元 Skorohod 方程式 $\xi(t) = w(t) + \phi(t)$ on $[0, \infty)$

$$\phi(t) = \max_{0 \leq s \leq t} (-w(s) \vee 0)$$

反射壁 SDE の解の正則性

- rough path による formulation
- 連続性定理
- 解の初期値に関する連続性・滑らかさ
- 解の H -連続性
- Wong-Zakai 近似
- サポート定理

Definition 6

$D \subset \mathbb{R}^d$ 領域, $x \in \partial D$ とする. x における内向き単位法線ベクトル全体の集合 \mathcal{N}_x を次で定義する.

$$\mathcal{N}_{x,r} = \{n \in \mathbb{R}^d \mid |n| = 1, B(x - rn, r) \cap D = \emptyset\},$$
$$\mathcal{N}_x = \bigcup_{r>0} \mathcal{N}_{x,r}.$$

$B(z, r)$ は z を中心とする半径 r の開球.

- ∂D が C^2 ならば \mathcal{N}_x は通常の意味での単位法線ベクトルからなる 1 点集合.
- 境界が滑らかでなくても, 法線ベクトルが定まり得るが, 内側に尖って凹んでいる点では上記の意味の法線ベクトルの集合は空集合になる.

境界に対する仮定 (税所 [13])

Definition 7

Condition (A) (Uniform exterior sphere condition)
正の定数 r_0 が存在して

$$\mathcal{N}_x = \mathcal{N}_{x,r_0} \neq \emptyset \quad \forall x \in \partial D.$$

Condition (B) $\delta > 0, \beta \geq 1$ が存在し, 次が成立する:
各点 $x \in \partial D$ に対して単位ベクトル l_x が存在して

$$\inf \left\{ (l_x, n) \mid n \in \cup_{y \in B(x,\delta) \cap \partial D} \mathcal{N}_y \right\} \geq \frac{1}{\beta}.$$

解の存在・一意性

Theorem 8 (税所 (1987), 田中 (1979))

(1) D は (A), (B) を満たすとする.

(a) (★) に一意的な強い解 (X, Φ) が存在する.

(b) 任意の連続なパス w に対して Skorohod 方程式は一意的に解け, かつ Skorohod 写像 $\Gamma : w \mapsto \xi$ は一様収束の位相に関して $1/2$ -Hölder 連続写像である.

(2) D は凸集合とする. このとき, (★) に一意的な強い解が存在する.

解の道ごとの一意性について

- (2) は任意の連続な w に対して Skorohod 方程式が解けると主張しているわけではない。
- このような Skorohod 方程式の pathwise uniqueness は $C^{1+\gamma}$ 領域などで示されている:

R. Bass and K. Burdzy,
On pathwise uniqueness for reflecting Brownian motion in $C^{1+\gamma}$ domains,
Ann. Probab., Vol. 36, No.6, 2311-2331, (2008).

Wong-Zakai 近似

w_N を分点 $\{kT2^{-N}\}$ における w の折れ線近似とする。
($Y(t, y_0, w_N), \Phi(t, w_N)$) を次の反射壁 ODE の解とする :

$$\begin{aligned}dY(t, y_0, w_N) &= \sigma(Y(t, y_0, w_N))dw_N(t) \\ &\quad + b(Y^N(t, y_0, w_N))dt + d\Phi(t, w_N), \\ Y(0, y_0, w_N) &= y_0.\end{aligned}$$

簡単のため, $Y^N(t) = Y(t, y_0, w_N)$ と書く.

Wong-Zakai 近似 : 滑らかな境界の場合

(1) Doss and Priouret (1982) $D = (\mathbb{R}^d)^+$ or C^2 有界領域

$$\max_{0 \leq t \leq T} |Y^N(t) - Y(t)| \rightarrow 0 \quad \text{in probability.}$$

証明には Skorohod 写像 Γ の sup-norm に関するリップシッツ連続性が使われる.

(2) $D = (\mathbb{R}^d)^+$

Doss-Priouret の証明方法を用い以下の収束が示せる (菊地孝典の修士論文, 2014). ただし $\Delta_N = 2^{-N}T$.

$$E[\max_{0 \leq t \leq T} |Y^N(t) - Y(t)|^p] \leq C (\Delta_N \log \Delta_N)^{p/2},$$

この収束の速さは反射壁の無い場合のオーダーと同じである.

Wong-Zakai 近似 : 滑らかでない境界の場合

Theorem 9 (A-S, 2013)

(A), (B), (C)^a を仮定する. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $C_{T,\varepsilon}$ が存在してすべての $N \in \mathbb{N}$ に対して,

$$E \left[\max_{0 \leq t \leq T} |Y^N(t) - Y(t)|^2 \right] \leq C_{T,\varepsilon} \Delta_N^{(1-\varepsilon)/6}.$$

特に $P(\lim_{N \rightarrow \infty} \max_{0 \leq t \leq T} |Y^N(t) - Y(t)| = 0) = 1$.

^a(B) が成立していれば (C) も局所的に成立する

Tusheng Zhang も同様な結果を得ている
(arXiv:1304.6629)

Reflecting rough differential equations

- $2 \leq p < 3$.
- $X_{s,t} = (X_{s,t}^1, X_{s,t}^2) \in \Omega_p(\mathbb{R}^n)$: p -rough path.
- $\sigma \in C_b^2(\mathbb{R}^d, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d))$
- $y(t) : \mathbb{R}^d$ 上の連続なパスで $y(0) = y_0$.
- Φ_t ($0 \leq t \leq T$) : \mathbb{R}^d -値有界変動連続関数
- (y, Φ) が \bar{D} 上の reflecting rough differential equation:

$$dy(t) = \sigma(y(t))dX_t + d\Phi_t, \quad y(0) = y_0 \in \bar{D}.$$

の解であるとは、次が成立するときに言う：

(1) $y(t)$ は rough differential equation

$$dy(t) = \sigma(y(t))dX_t + d\Phi_t, \quad y(0) = y_0 \in \bar{D}.$$

の解である.

(2) $y(t) \in \bar{D}$ ($0 \leq t \leq T$) であり, Borel 可測写像 $s \in [0, T] \mapsto n(s) \in \mathbb{R}^d$ が存在し

$$\Phi_t = \int_0^t \mathbf{1}_{\partial D}(y(s))n(s)d\|\Phi\|_{[0,s]} \quad 0 \leq t \leq T.$$

ただし, $y(s) \in \partial D$ のとき, $n(s) \in \mathcal{N}_{y(s)}$.

Theorem 10 (解の存在と評価)

(A), (B) と

$$\begin{aligned} \text{(H1)} \quad \|L(w)\|_{[s,t]} &\leq C_D \max_{s \leq u \leq v \leq t} |w(v) - w(u)| \\ &0 \leq s \leq t \leq T \end{aligned}$$

を仮定する. ω を $X_{s,t}$ の control function とする:

$$|X_{s,t}^i| \leq \omega(s, t)^{i/p} \quad 0 \leq s \leq t \leq T, \quad i = 1, 2.$$

このとき, 以下の評価を満たす解 (y, Φ) が存在する:

$$\begin{aligned} |y(t) - y(s)| &\leq C(1 + \omega(0, T))^3 \omega(s, t)^{1/p}, \\ \|\Phi\|_{[s,t]} &\leq C(1 + \omega(0, T)) \omega(s, t)^{1/p}. \end{aligned}$$

以下の条件の下で (H1) は成立する (田中, 1979).

- D は凸,
- 次を満たす単位ベクトル $l \in \mathbb{R}^d$ が存在する :

$$\inf\{(l, n(x)) \mid n(x) \in N_x, x \in \partial D\} > 0.$$

また, 上記定理を用いて, 有界 C^2 領域 の場合も同様な評価を持つ解の存在が証明されると思われる.

Reflecting SDE の解 $Y(t)$ との関係

- Brownian rough path が定義される 確率 1 の部分集合 $\Omega \subset W^n$ を考える.
- $Y(t, w)$ を Stratonovich reflecting SDE

$$\begin{aligned}dY(t) &= \sigma(Y(t)) \circ dw(t) + d\Phi(t), \\ Y(0) &= y_0\end{aligned}$$

の解とする.

- 確率 1 の部分集合 $\Omega' \subset \Omega$ が存在して, $(Y(t, w), \Phi(t, w))$ ($w \in \Omega'$) は reflecting rough differential equation driven by \bar{w} の解であり, Theorem 10 で与えられている評価を満たす.

反射壁 SDE の解の正則性

- rough path による formulation
 - ▶ 存在と評価
 - ▶ 一意性？
- 連続性定理？
- 解の初期値に関する連続性・滑らかさ？
 - ▶ Skorohod 方程式の場合：Burdzy, Andres による初期値に関する μ -a.s. 微分可能性の証明
- 解の H -連続性？これは上記のことと関連する。
- Wong-Zakai 近似
- サポート定理: AKS 流のアプローチで示せそう。
- $Y(t, w)$ または $y(t)$ の分布の正則性？

参考文献・補足

- Krzysztof Burdzy,
Differentiability of stochastic flows of reflected Brownian motions, EJP, Vol 14 (2009), no.75, 2182-2240.
- Wen Yue and Tusheng Zhang,
Absolute continuity of the laws of perturbed diffusion processes and perturbed reflected diffusion processes, arXiv:1305.0713.
- I. Bailleul,
Path-dependent rough differential equations, arXiv:1309.1291.