# 確率解析とその周辺

**日 時**：2011 年 11 月 11 日 (金)–13 日 (日)

**会場**：佐賀大学理工学部 6 号館 310 講義室

## 2011 年度　　確率解析とその周辺

以下の要領で、本年度の「確率解析とその周辺」を開催いたします。ふるってご参加ください。

**日 時**：2011 年 11 月 11 日 (金)–13 日 (日)

**場 所**：佐賀大学理工学部 6 号館 310 講義室

**世 話 人**：会田茂樹 (東北大学大学院理学研究科) 重川一郎 (京都大学大学院理学研究科) 河備浩司 (岡山大学自然科学研究科) 稲浜譲（名古屋大学多元数理研究科）三苫至（佐賀大学理工学部)

**2011 年度 確率解析シンポジウム ホームページ**
http://www.math.kyoto-u.ac.jp/probability/sympo/sa11/

# プログラム

## 11 月 11 日 (金)

14:00–14:40　藤田安啓 (富山大学)
Hamilton-Jacobi 方程式から導かれる対数型 Sobolev の不等式とその応用

14:50–15:40　上村稔大 (関西大学)
On conservativeness of symmetric jump processes(その 1 )

16:00–16:40　塩沢裕一 (岡山大学)
A remark on the uniqueness of Silverstein extensions of symmetric Dirichlet forms
（桑江一洋氏（熊本大学）との共同研究）

16:50–17:30　濱名裕治（熊本大学）
The probability distributions of the first hitting times of Bessel processes
(松本裕行氏（山形大学）との共同研究)

## 11 月 12 日 (土)

9:50–10:30　楠岡誠一郎 (京都大学)
Stein's method for invariant measures of diffusions via Malliavin calculus
(Ciprian A. Tudor 氏 (Université de Lille 1) との共同研究)

10:40–11:20　稲浜譲 (名古屋大学)
Short time kernel asymptotics for Young SDE driven by fractional Brownian motion by means of Watanabe distribution theory

11:40–12:30　桑田和正 (お茶の水女子大学)
Bakry-Émery 型微分評価と関連する話題 (その 1 )

— 昼食休憩 —

14:00–14:40　竹内敦司 (大阪市立大学)
Density of stochastic differential equations driven by gamma process

14:50–15:40　上村稔大 (関西大学)
On conservativeness of symmetric jump processes(その２)

16:00–16:40　田原喜宏 (長岡高専)
nearly stable process の加法汎函数に対する大偏差原理

16:50–17:30　結城郷 (立命館大学)
Local Smoothness of the Densities of Solutions of SDEs with Singular Coefficients
(コハツ・ヒガ・アルトウーロ氏と林正史氏（共に立命館大学）との共同研究)

## 11 月 13 日 (日)

9:50–10:30　松浦將國（東北大学）
飛躍関数付き Feynman-Kac 処罰問題

10:40–11:20　熊ノ郷直人 (工学院大学)
区分的陪特性経路による相空間経路積分－計算例を中心に

11:40–12:30　桑田和正 (お茶の水女子大学)
Bakry-Émery 型微分評価と関連する話題 (その２)

# Hamilton-Jacobi 方程式から導かれる<br>対数型 Sobolev の不等式とその応用

藤田 安啓 (富山大学理工学研究部) *

本講演では, $\mathbb{R}^n$ 上の Lipschitz 連続函数に対して, その Lipschitz 定数を含む対数型 Sobolev の不等式とその応用について述べる. この対数型 Sobolev の不等式はその起源を Hamilton–Jacobi 方程式に持っている. 以下, 次の記号を使う：

$$\mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^n) \,\middle|\, e^f \in L^\alpha(\mathbb{R}^n; dx) \right\}, \quad \alpha > 0,$$

$$k_n = \left( \frac{1}{\omega_{n-1}(n-1)!} \right)^{1/n} \quad (\omega_{n-1} = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2) \text{ は } \mathbb{R}^n \text{ の単位球の表面積}),$$

全ての積分の定義域は $\mathbb{R}^n$,

$$\mathrm{Ent}(f) = \int f \log f dx - \int f dx \ \log \int f dx,$$

$$\|f\|_\alpha = \left( \int |f(x)|^\alpha dx \right)^{1/\alpha},$$

$$\|Df\|_\infty = \|Df\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)}.$$

**THEOREM 1** ある $\alpha > 0$ に対して, $f \in \mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ とする. このとき, $f \in \mathrm{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)$ $(\beta > \alpha)$ で, 対数型 Sobolev の不等式

$$\mathrm{Ent}(e^{\beta f}) \le n \int e^{\beta f} dx \ \log \left( \frac{k_n \beta \|Df\|_\infty}{e} \right), \quad \beta > \alpha. \tag{1}$$

が成立する. 不等式 (1) は, $f(x) = C - \ell|x - a|$ $(C \in \mathbb{R}$, $\ell > 0$, $a \in \mathbb{R}^n$ は定数) のとき等号が成立するという意味で optimal である.

**THEOREM 2** ある $\alpha > 0$ に対して, $f \in \mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ とする. このとき, $f \in \mathrm{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)$ $(\beta > \alpha)$ で, 不等式

$$\|e^f\|_\gamma \, (k_n \gamma \|Df\|_\infty)^{n/\gamma} \le \|e^f\|_\beta \, (k_n \beta \|Df\|_\infty)^{n/\beta}, \qquad \alpha \le \beta < \gamma \tag{2}$$

が成立する. 不等式 (2) は, $f(x) = C - \ell|x - a|$ $(C \in \mathbb{R}$, $\ell > 0$, $a \in \mathbb{R}^n$ は定数) のとき等号が成立するという意味で optimal である.

不等式 (1) と (2) は同値な不等式である. 不等式 (1) は, Gentil [4] が示した $p > 1$ に対する $L^p$–対数型 Sobolev の不等式において $p \to \infty$ とした不等式と考えることができる. また, この $L^p$–対数型 Sobolev の不等式は, Hamilton-Jacobi 方程式

$$u_t(x,t) + \frac{1}{p}|Du(x,t)|^p = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \qquad u(\cdot,0) = f \quad \text{on } \mathbb{R}^n \tag{3}$$

* 「確率解析とその周辺」, 佐賀大学, 2011 年 11 月 11 日 (金) – 13 日 (日)

の解の超縮小性と同値である.

講演では, 上の 2 つの不等式の応用として, Lipschitz 定数のエントロピーによる表現および一般の Hamilton-Jacobi 方程式の解の超縮小性について述べたい.

## 参考文献

[1] S. G. Bobkov, I. Gentil and M. Ledoux, *Hypercontractivity of Hamilton-Jacobi equations*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 80 (2001), pp. 669–696.

[2] Y. Fujita, *An optimal logarithmic Sobolev inequality with Lipschitz constants*, Journal of Functional Analysis 261 (2011), pp. 1133-1144.

[3] I. Gentil, *Ultracontractive bounds on Hamilton—Jacobi equations*, Bulletin des Sciences Mathématiques 126 (2002), pp. 507–524.

[4] I. Gentil, *The general optimal $L^p$-Euclidean logarithmic Sobolev inequality by Hamilton-Jacobi equations*, Journal of Functional Analysis 202 (2003) pp. 591–599.

# On conservativeness of symmetric jump processes

上村稔大 （関西大学システム理工学部）

## 1　はじめに

ジャンプ型確率過程に対する保存性の研究は最近いろいろな人によりなされてきている．特にジャンプ型過程に対する熱核の評価を導出する際には，その保存性が重要な役割を果たす.

ところで，拡散過程の保存性の研究に関しては，状態空間の体積増大度との関連で非常に sharp な結果が 90 年代半ばまでに得られているが，ジャンプ型過程に関してはその立場で見た研究は非常に少ない．最近 [MU11] や [GHM11] により，適当な指数増大度のもとで対称なジャンプ過程の保存性が成り立つことが示された．そこで，一つ目の講演では，主に [MU11](あるいは [GHM11]) に沿って，対称なジャンプ型過程の保存性を，それを規定する Lévy 核 (jump rate) と，状態空間の適当な体積増大度の条件とともに見ていくことにする．

二つ目の講演では，[SU11] に沿って，基礎の測度は Lebesgue 測度に固定して，Lévy 核の遠方での増大度によって保存性が成立することを紹介する．これは，$\mathbb{R}^d$ 上の拡散過程の保存性が，拡散係数の $x \to \infty$ における増大度に応じて成立することの類似である．

## 2　保存性の定義と一般的結果

$X$ を局所コンパクトで可分な距離空間，$m$ をその上の台が $X$ 全体である正値 Radon 測度する．また，$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ を $L^2(X;m)$ 上の正則な対称 Dirichlet 形式とする．$\{T_t, t>0\}$ を対応する $L^2$ 上の強連続半群とする．

このとき，$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ あるいは $\{T_t, t>0\}$ が**保存的** (conservative) であるとは，

$$T_t 1 = 1 \quad m\text{-a.e.}, \quad \text{for } t>0$$

が成り立つときを言う．Dirichlet 形式の保存性の必要十分条件は，Oshima [O92] による次の結果が知られている (see also [FOT11, Theorem 1.6.6])：

**定理 2.1** 以下の条件は同値である：

(i) $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ が保存的である．

(ii) 次を満たす関数列 $\{u_n\} \subset \mathcal{F}$ が存在する：

$$0 \le u_n \le 1, \quad \lim_{n\to\infty} u_n = 1 \ m\text{-}a.e., \quad \lim_{n\to\infty} \mathcal{E}(u_n, v) = 0 \quad \text{for any } v \in \mathcal{F}_e.$$

ただし，$u \in \mathcal{F}_e$ (これを $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ の拡大 Dirichlet 空間 (extended Dirichlet space) と呼ばれている) であるとは，$|u| < \infty$ $m$-$a.e.$ であり，かつ次を満たす関数列 $\{u_n\} \subset \mathcal{F}$ が存在するときをいう：

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u \ \ m\text{-}a.e., \quad \lim_{n,m\to\infty} \mathcal{E}(u_n - u_m, u_n - u_m) = 0.$$

$\mathsf{M} = (\Omega, \mathcal{M}, X_t, \xi, \mathbb{P}_x)$ を $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ に対応する対称 Hunt 過程とすると，$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ が保存的であることと

$$\mathbb{P}_x(\xi = \infty) = 1, \quad \text{q.e. } x \in X$$

が成り立つこととは同値である．すなわち，$\mathcal{E}$ が保存的であるというのは，粒子 (確率過程) が有限時間内に空間を出たり，途中で死滅したりしないと言うことである．

$(\mathcal{A}, \mathcal{D}(\mathcal{A}))$ を $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ に対応する $L^2$ 上の生成作用素とすると，

$$\mathcal{E}(u,v) = -(\mathcal{A}u, v), \quad \forall\, u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}),\ v \in \mathcal{F}$$

が成り立つ．次の系は Oshima の保存性の結果を生成作用素の条件で書き換えたものである：

**系 2.1** ([IU04, Lemma 3.2]) $(\mathcal{A}, \mathcal{D}(\mathcal{A}))$ を Dirichlet form $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ の生成作用素とし，更に次をみたす関数列 $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{D}(\mathcal{A})$ が存在するとする：

$$\sup_{n\geq 1} \|\varphi_n\|_\infty < \infty, \quad \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = 1 \quad \text{for} \quad m\text{-}a.e.\ x \in X,$$

$$\sup_{n\geq 1} \|\mathcal{A}\varphi_n\|_\infty < \infty, \quad \lim_{n\to\infty} \mathcal{A}\varphi_n(x) = 0 \quad \text{for} \quad m\text{-}a.e.\ x \in X.$$

このとき，$(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ は保存的である．

# 3 設定と結果

## 3.1 Case 1

$(X, m)$ を前節と同じものとする．$\mu(x, dy)$ を $X \times \mathcal{B}(X)$ 上の核とし，二次汎関数

$$\mathcal{E}(u,v) = \frac{1}{2} \iint_{x\neq y} \big(u(x) - u(y)\big)\big(v(x) - v(y)\big)\mu(x, dy)m(dx).$$

を考える．ただし，$u, v$ は右辺の積分が意味を持つような可測関数とする．

次の条件を考える：

**Assumption (A):**

(1) $\mu(x, dy)m(dx)$ は $X \times X \setminus \mathsf{diag}$ [1] 上対称な測度である： $\mu(x, dy)m(dx) = \mu(y, dx)m(dy)$.

(2) $M := \sup_{x\in X} \int_{y\neq x} \Big(1 \wedge d(x,y)^2\Big)\mu(x, dy) < \infty.$

**Assumption (A)** のもと，$(\mathcal{E}, C_0^{\mathsf{lip}}(X))$ は $L^2(X; m)$ 上の可閉な Markov 的二次形式となる．よって，

$$\mathcal{E}_1(u,v) = \mathcal{E}(u,v) + \int_X u(x)v(x)m(dx)$$

とおき，この内積による $C_0^{\mathsf{lip}}(X)$ の閉包を $\mathcal{F}$ と表せば，$(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ は $L^2(X; m)$ 上の正則な対称 Dirichlet 形式となる．[2] よって Fukushima's existence theorem により，$(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ に対応する $m$-対称 Hunt 過程 $\mathsf{M} = (X_t, \mathbb{P}_x)$ が存在する．また，この Hunt 過程は純飛躍型過程，すなわちジャンプ型過程となっている．

この小節での主結果は次の定理である：

[1] diag は対角線集合である： $\mathsf{diag} = \{(x,x) : x \in X\}$

[2] 正則性を出すだけなら，(2) は次の条件に緩和される：$M(\bullet) := \int_{y\neq\bullet} \Big(1 \wedge d(\bullet, y)^2\Big)\mu(\bullet, dy) \in L^1_{\mathsf{loc}}(X; m)$.

**定理 3.1** ([GHM11, Theorem 1.3]) 各 $x \in X,\ r > 0$ に対して $V(x,r) := m(B(x,r))$ とおく．但し，$B(x,r) = \{y \in X :\ d(x,y) < r\}$．このとき，ある $x_0 \in X$ が存在して，

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{\ln V(x_0,r)}{r \ln r} < \frac{1}{2}$$

が成り立てば，$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は保存的である．

**注意 3.1** [MU11] では，より強い次の条件の下で保存性を示している：

$$e^{-rd(x_0,\bullet)} \in L^1(X;m), \quad \forall\, r > 0.$$

**例 3.1** (symmetric stable-like process) $X = \mathbb{R}^d,\ m(dx) = dx$ (Lebesgue 測度) とする． いま可測関数 $\alpha : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ に対して

$$\mathcal{E}(u,v) = \frac{1}{2} \iint_{x\neq y} \frac{\big(u(x)-u(y)\big)\big(v(x)-v(y)\big)}{|x-y|^{d+\alpha(x)}} dxdy, \quad u,v \in C_0^{\mathsf{lip}}(\mathbb{R}^d)$$

とおく．このとき，適当な正数 $\underline{\alpha}, \overline{\alpha}$ が存在して，

$$0 < \underline{\alpha} \le \alpha(x) \le \overline{\alpha} < 2 \quad \text{for} \quad \text{a.e. } x \in \mathbb{R}^d$$

を満たすとする．すると，$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の正則な Dirichlet 形式となる．但し，$\mathcal{F} := \overline{C_0^{\mathsf{lip}}(\mathbb{R}^d)}^{\sqrt{\mathcal{E}_1}}$．更に，**Assumption (A)** 及び定理 3.1 の条件を満たすので，対応する対称安定型過程は保存的である．

## 3.2 Case 2

ここでは，$X = \mathbb{R}^d$ 及び基礎の測度は Lebesgue 測度 $dx$ として議論を進める．この小節では，Lévy 核 $\mu(x,dy)$ が適当な Radon 測度 $n$ を用いて，

$$\mu(x,dy) = k(x,y)n(dy)$$

と書けている場合について考える．また，次の条件を考える．

**Assumption (B)**:

(1) Radon 測度 $n$ は，次の意味で対称である：

$$n(A) = n(-A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

但し，$-A = \{-x : x \in A\}$.

(2) $\gamma(x) := |x|^2 + 4, \quad x \in \mathbb{R}^d$ とおく．このとき $M_1, M_3 \in L^2_{\mathsf{loc}}(\mathbb{R}^d)$，かつ $M_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ を満たす：

- $M_1(x) := \displaystyle\int_{0<|h|<\frac{\sqrt{\gamma(x)}}{2}} |h|^2 k_s(x,x+h)n(dh),$
- $M_2(x) := \displaystyle\int_{|h|\ge\frac{\sqrt{\gamma(x)}}{2}} k_s(x,x+h)n(dh),$
- $M_3(x) := \displaystyle\int_{0<|h|<\frac{\sqrt{\gamma(x)}}{2}} |h| \cdot \big|k_s(x,x+h) - k_s(x,x-h)\big|\, n(dh), \quad x \in \mathbb{R}^d.$

但し，$k_s(x,y) = \dfrac{1}{2}\Big(k(x,y) + k(y,x)\Big)$.

**命題 3.1 Assumption (B)** のもと，

$$\begin{cases} \mathcal{E}(u,v) & := & \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d}\int_{h\neq 0}\big(u(x)-u(y)\big)\big(v(x)-v(y)\big)k(x,x+h)n(dh)dx \\ \mathcal{D}(\mathcal{E}) & := & \Big\{u\in L^2(\mathbb{R}^d):\ \mathcal{E}(u,u)<\infty\Big\} \end{cases}$$

は $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の Dirichlet 形式となり，$\mathcal{D}(\mathcal{E})\supset C_0^{\mathsf{lip}}(\mathbb{R}^d)$ を満たす．$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ を $(\mathcal{E},C_0^{\mathsf{lip}}(\mathbb{R}^d))$ の閉包を表し，また $(\mathcal{A},\mathcal{D}(\mathcal{A}))$ を $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ の $(L^2)$-生成作用素とする：

$$\mathcal{E}(u,v)=-(\mathcal{A}u,v),\quad u\in\mathcal{D}(\mathcal{A}),\ v\in\mathcal{F}.$$

このとき，$\mathcal{D}(\mathcal{A})\supset C_0^2(\mathbb{R}^d)$ であり，更に $C_0^2(\mathbb{R}^d)$ の上では $\mathcal{A}$ は次の表示をもつことが分かる：

$$\begin{aligned}\mathcal{A}u(x) &= \int_{h\neq 0}\Big(u(x+h)-u(x)-\nabla u(x)\cdot h1_F(x)\Big)k_s(x,x+h)n(dh) \\ &\quad +\frac{1}{2}\int_{F(x)}\nabla u(x)\cdot h\Big(k_s(x,x+h)-k_s(x,x-h)\Big)n(dh),\quad x\in\mathbb{R}^d,\quad u\in C_0^2(\mathbb{R}^d).\end{aligned}$$

但し，$F(x)=\Big\{h\in\mathbb{R}^d:\ 0<|h|<\dfrac{\sqrt{\gamma(x)}}{2}\Big\},\ \ x\in\mathbb{R}^d.$

さて，保存性が成立するための条件を更に述べよう：

**Assumption (C)**: **Assumption (B)**(2) で定義された関数 $M_1,M_2,M_3$ が以下を満たす：

- $\displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\frac{M_1(x)}{\gamma(x)}=\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\frac{1}{\gamma(x)}\int_{0<|h|<\frac{\sqrt{\gamma(x)}}{2}}|h|^2k_s(x,x+h)n(dh)<\infty,$
- $\displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}^d}M_2(x)=\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\int_{|h|\geq\frac{\sqrt{\gamma(x)}}{2}}k_s(x,x+h)n(dh)<\infty,$
- $\displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\frac{M_3(x)}{\sqrt{\gamma(x)}}=\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\frac{1}{\sqrt{\gamma(x)}}\int_{0<|h|<\frac{\sqrt{\gamma(x)}}{2}}|h|\cdot\Big|k_s(x,x+h)-k_s(x,x-h)\Big|\,n(dh)<\infty.$

系 2.1 を用いることにより，次の結果が成り立つことが分かる：

**定理 3.2 Assumption (B)**(1) 及び **Assumption (C)** を仮定すると，Dirichlet 形式 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は保存的である．

# References


[FOT11] M. Fukushima, Y. Oshima and M. Takeda, *Dirichlet Forms and Symmetric Markov Processes*, 2nd rev. and ext. ed., Walter de Gruyter, 2011.

[GHM11] A. Grigor'yan, X.-H. Huang and J. Masamune, On stochastic completeness of jump processes, to appear in *Math. Z.*, 2011

[IU04] Y. Isozaki and T. Uemura, A family of stable-like processes and its global path properties, *Probab. Math. Statist.*, **24** (2004), 145-164.

[MU11] J. Masamune and T. Uemura, Conservation property of symmetric jump processes, *Ann. Inst. Henri Poincaré - Probab. Statist.*, **47** (2011), 650-662

[O92] Y. Oshima, On conservativeness and recurrence criteria for Markov processes, *Potential Anal.*, **1** (1992), 115-131.

[SU11] Y. Shiozawa and T. Uemura, Explosion of jump-type symmetric Dirichlet forms on $\mathbb{R}^d$, preprint, 2011

# A remark on the uniqueness of Silverstein extensions of symmetric Dirichlet forms

熊本大学大学院自然科学研究科　桑江一洋
岡山大学大学院自然科学研究科　塩沢裕一

Frank-Lenz-Wingert ([2]) は, 強局所型とは限らない正則 Dirichlet 形式に対して内在的距離を定義した．本講演では, この内在的距離を用いて正則 Dirichlet 形式の Silverstein 拡張の一意性が証明できることを注意する．

$E$ を局所コンパクト可分距離空間とし, $m$ を $E$ 上の正値 Radon 測度で $\mathrm{supp}[m]=E$ を満たすものとする．$C(E)$ を $E$ 上の連続関数全体の集合とし, $C_0(E)$ を $E$ 上連続かつ台がコンパクトな関数全体の集合とする．$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ を $L^2(E;m)$ 上の正則 Dirichlet 形式とすれば, 任意の $u\in\mathcal{F}\cap C_0(E)$ に対して

$$\mathcal{E}(u,u)=\mathcal{E}^{(c)}(u,u)+\iint_{E\times E\setminus d}(u(x)-u(y))^2J(\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)+\int_E u(x)^2\,\kappa(\mathrm{d}x)$$

を満たす強局所対称 2 次形式 $\mathcal{E}^{(c)}$, $E\times E\setminus d$ 上の正値対称 Radon 測度 $J(\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)$, $E$ 上の正値 Radon 測度 $\kappa$ の組が一意に定まる (Beurling-Deny 分解)．ただし, $d:=\{(x,x)\mid x\in E\}$. また, $u\in\mathcal{F}_b$ $(:=\mathcal{F}\cap L^\infty(E;m))$ に対して

$$\int_E f\,\mathrm{d}\mu_{\langle u\rangle}=2\mathcal{E}(uf,u)-\mathcal{E}(u^2,f),\quad f\in\mathcal{F}\cap C_0(E)$$

を満たす正値測度 $\mu_{\langle u\rangle}$ (エネルギー測度) が一意に存在する．ここで, $\mu^c_{\langle u\rangle}$ を $\mu_{\langle u\rangle}$ の局所部分とすれば, $u\in\mathcal{F}_{\mathrm{loc}}$ に対して測度 $\mu^c_{\langle u\rangle}$ を自然に定義できることを注意する．ただし

$$\mathcal{F}_{\mathrm{loc}}:=\{u:E\to\mathbb{R}\mid\forall G\subset E:\text{相対コンパクト},\ \exists u_G\in\mathcal{F}\text{ s.t. }u=u_G\ m\text{-a.e. on }G\}.$$

さらに各 $u\in\mathcal{F}_{\mathrm{loc}}$ に対して, $E$ 上の正値測度 $\mu^j_{\langle u\rangle}$ と $\mu^\kappa_{\langle u\rangle}$ をそれぞれ

$$\mu^j_{\langle u\rangle}(B):=2\iint_{B\times E\setminus d}(u(x)-u(y))^2\,J(\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y),\quad \mu^\kappa_{\langle u\rangle}(B):=\int_B u(x)^2\,\kappa(\mathrm{d}x)$$

で定義する．このとき, $\mathcal{F}\subset L^2(E;m)$ より $\mu^\kappa_{\langle u\rangle}$ は Radon 測度になるが, $\mu^j_{\langle u\rangle}$ は必ずしも Radon 測度ではない．そこで, $\mathcal{F}^\dagger_{\mathrm{loc}}$ を次で定義する．

$$\mathcal{F}^\dagger_{\mathrm{loc}}:=\{u\in\mathcal{F}_{\mathrm{loc}}\mid\mu^j_{\langle u\rangle}\text{ は Radon 測度である }\}.$$

**定義.** ([2])　$E$ 上の擬距離 $\rho:E\times E\to[0,\infty]$ は, 以下の条件を満たすとき, $L^2(E;m)$ 上の正則 Dirichlet 形式 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ の**内在的距離 (intrinsic metric)** であるという: $m_c+m_j\le m$ (すなわち, $m_c+m_j$ は $m$ に絶対連続かつ $\mathrm{d}(m_c+m_j)/\mathrm{d}m\le 1$ $m$-a.e.) を満たす 2 つの正値

Radon 測度 $m_c$ と $m_j$ が存在し, 任意の $A \subset E$ と $T > 0$ に対して関数 $\rho_A(x) := \inf_{y \in A} \rho(x, y)$ は以下の 3 条件を満たす.

(i) $\rho_A \wedge T \in \mathcal{F}^{\dagger}_{\mathrm{loc}} \cap C(E)$ (ii) $\mu^{j}_{\langle \rho_A \wedge T \rangle} \leq m_j$ (iii) $\mu^{c}_{\langle \rho_A \wedge T \rangle} \leq m_c$.

$L^2(E; m)$ 上の Dirichlet 形式 $(\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\mathcal{F}})$ は,

$$\tilde{\mathcal{F}} \supset \mathcal{F}, \quad \tilde{\mathcal{E}}(u, u) = \mathcal{E}(u, u), \quad \forall u \in \mathcal{F}$$

を満たすとき, $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ の**拡張**であるという. $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ の拡張全体を $\mathcal{A}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ としたとき,

$$\mathcal{A}_S(\mathcal{E}, \mathcal{F}) := \left\{ (\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\mathcal{F}}) \in \mathcal{A}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \mid u \cdot v \in \mathcal{F}_b, \ \forall u \in \mathcal{F}_b, \forall v \in \tilde{\mathcal{F}}_b \right\}$$

の要素を $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ の **Silverstein 拡張**という ([5], [6]).

$(\mathcal{E}^{\mathrm{ref}}, \mathcal{F}^{\mathrm{ref}})$ を**反射 Dirichlet 空間**とする ([1]). すなわち

$$\mathcal{F}^{\mathrm{ref}} := \left\{ u \in L^2(E; m) \mid u^{(n)} \in \mathcal{F}_{\mathrm{loc}}, \forall n \geq 1 \text{ かつ } \sup_{n \geq 1} \mu^{c+j+\kappa}_{\langle u^{(n)} \rangle}(E) < \infty \right\}$$

$$\mathcal{E}^{\mathrm{ref}}(u, u) := \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2} \mu^{c+j+2\kappa}_{\langle u^{(n)} \rangle}(E), \quad u \in \mathcal{F}^{\mathrm{ref}}.$$

ただし, $E$ 上の関数 $u$ と自然数 $n$ に対して $u^{(n)} := (-n) \vee u \wedge n$. また, Dirichlet 形式に対する半順序 $\prec$ を次で定める: Dirichlet 形式 $(\mathcal{E}^1, \mathcal{F}^1)$ と $(\mathcal{E}^2, \mathcal{F}^2)$ に対して

$$(\mathcal{E}^1, \mathcal{F}^1) \prec (\mathcal{E}^2, \mathcal{F}^2) \underset{\text{定義}}{\iff} \mathcal{F}^1 \subset \mathcal{F}^2 \quad \text{かつ} \quad \mathcal{E}^2(u, u) \leq \mathcal{E}^1(u, u), \ \forall u \in \mathcal{F}^1.$$

すると, 反射 Dirichlet 空間 $(\mathcal{E}^{\mathrm{ref}}, \mathcal{F}^{\mathrm{ref}})$ は $(\mathcal{A}_S(\mathcal{E}, \mathcal{F}), \prec)$ の最大元になる ([4, Theorem 5.1]).

**仮定.** $L^2(E; m)$ 上の正則 Dirichlet 形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ の内在的距離は $E$ 上の距離である. さらに, この距離に関する任意の開球は $E$ の位相に関して相対コンパクトである.

**定理.** 仮定の下, 正則 Dirichlet 形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ の Silverstein 拡張は一意に定まる. すなわち, $(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = (\mathcal{E}^{\mathrm{ref}}, \mathcal{F}^{\mathrm{ref}})$ が成立する.

**注意.** (i) Silverstein 拡張の一意性は, 強局所ディリクレ形式の場合は [3] で示されている.
(ii) [4, Theorem 6.1] において, 一般の準正則 Dirichlet 形式の Silverstein 拡張が一意になるための十分条件が与えられている. 今回の証明は, 正則な場合に限られているが, 内在的距離を用いた見通しの良いものである.
(iii) 保存的な Dirichlet 形式の Silverstein 拡張は一意に定まり ([4, Theorem 6.3]), 保存的ではない場合も一意性は成立し得る. 実際, そのような強局所 Dirichlet 形式の例は [3] で与えられている. ここで, 非局所 Dirichlet 形式についても同様な例が構成できることを注意する.

## 参考文献


[1] Z.-Q. Chen, *Probab. Theory Related Fields* **94** (1992), no. 2, 135–162.

[2] R.L. Frank, D. Lenz and D. Wingert, arXiv:1012.5050v1 [math.FA].

[3] T. Kawabata and M. Takeda, *Osaka J. Math.* **33** (1996), 881–893.

[4] K. Kuwae, *Potential Anal.* **16** (2002), no. 3, 221–247.

[5] M.L. Silverstein, *Illinois Jour. Math.* **18** (1974), 310–355.

[6] M.L. Silverstein, Lecture Notes in Math., **426**, 1974, Springer.

# The probability distributions of the first hitting times of Bessel processes

濱名裕治（熊本大理），松本裕行 (山形大理)

実数 $\nu$ に対して，$\dfrac{1}{2}\dfrac{d^2}{dx^2}+\dfrac{2\nu+1}{2x}\dfrac{d}{dx}$ を生成作用素にもつ 1 次元拡散過程を，指数 $\nu$ のベッセル過程とよぶ．特に，$2\nu+2$ が正の整数であるときは，$2\nu+2$ 次元ブラウン運動の半径方向の運動として表示できる．境界は 0 と $\infty$ で，$\infty$ は自然境界である．0 は，$\nu\leqq -1$ のときは流出境界，$-1<\nu<0$ のときは正則境界，$\nu\geqq 0$ のときは流入境界であり，境界条件は，$\nu\leqq -1$ のとき吸収壁，$-1<\nu<0$ のとき反射壁とする．

$a$ から出発する指数 $\nu$ のベッセル過程が初めて $b$ に到達する時刻を $\tau_{a,b}^{(\nu)}$ とする．$\tau_{a,b}^{(\nu)}$ のラプラス変換が求められており，$\lambda>0$ に対して，次が成立する．

（1）$b>0,\nu>-1$ のとき，$E[e^{-\lambda\tau_{0,b}^{(\nu)}}]=\dfrac{(b\sqrt{2\lambda})^\nu}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}\dfrac{1}{I_\nu(b\sqrt{2\lambda})}$

（2）$0<a\leqq b,\nu>-1$ のとき，$E[e^{-\lambda\tau_{a,b}^{(\nu)}}]=\dfrac{a^{-\nu}I_{-\nu}(a\sqrt{2\lambda})}{b^{-\nu}I_{-\nu}(b\sqrt{2\lambda})}$

（3）$0<a\leqq b,\nu\leqq -1$ のとき，$E[e^{-\lambda\tau_{a,b}^{(\nu)}}]=\dfrac{a^{-\nu}I_{-\nu}(a\sqrt{2\lambda})}{b^{-\nu}I_{-\nu}(b\sqrt{2\lambda})}$

（4）$a>0,\nu<0$ のとき，$E[e^{-\lambda\tau_{a,0}^{(\nu)}}]=\dfrac{2^{\nu+1}}{\Gamma(|\nu|)(a\sqrt{2\lambda})^\nu}K_\nu(a\sqrt{2\lambda})$

（5）$0<b\leqq a,\nu\in\mathbb{R}$ のとき，$E[e^{-\lambda\tau_{a,b}^{(\nu)}}]=\dfrac{a^{-\nu}K_\nu(a\sqrt{2\lambda})}{b^{-\nu}K_\nu(b\sqrt{2\lambda})}$

ただし，$I_\nu$ は第１種変形ベッセル関数，$K_\nu$ は第２種変形ベッセル関数である．

Ciesielski and Taylor (1962) は，$2\nu+2$ が自然数のとき，$\tau_{0,b}^{(\nu)}$ の密度関数が

$$\frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)b^2}\sum_{k=1}^\infty\frac{j_{\nu,k}^{\nu+1}}{J_{\nu+1}(j_{\nu,k})}e^{-\frac{j_{\nu,k}^2}{2b^2}t}$$

と表示されることを示した．彼らの結果は $\nu>-1$ でも正しいことがわかる．$\nu>0$ の場合は，Borodin-Salminen (Handbook of Brownian Motion, Springer) に書かれているが，証明や参考文献が見当たらない．

$0<a<b$ の場合，次の結果が得られた．

定理１．第１種ベッセル関数 $J_\nu$ の正の零点の増大列を $\{j_{\nu,k}\}_{k=1}^\infty$ とする．
（1）$\nu>-1$ のとき，

$$P(\tau_{a,b}^{(\nu)}\leqq t)=1-2\left(\frac{b}{a}\right)^\nu\sum_{k=1}^\infty\frac{J_\nu(aj_{\nu,k}/b)}{j_{\nu,k}J_{\nu+1}(j_{\nu,k})}e^{-\frac{j_{\nu,k}^2}{2b^2}t}$$

（2）$\nu\leqq -1$ のとき，

$$P(\tau_{a,b}^{(\nu)}\leqq t)=\left(\frac{b}{a}\right)^{2\nu}-2\left(\frac{b}{a}\right)^\nu\sum_{k=1}^\infty\frac{J_{-\nu}(aj_{-\nu,k}/b)}{j_{-\nu,k}J_{-\nu+1}(j_{-\nu,k})}e^{-\frac{j_{-\nu,k}^2}{2b^2}t}$$

次に $0 \leqq b < a$ の場合を考えるが，$\nu < 0$ のときの $\tau_{a,0}^{(\nu)}$ の確率密度は容易に求まり，

$$\frac{2^\nu}{\Gamma(|\nu|)a^2} t^{\nu-1} e^{-\frac{a^2}{2t}}$$

となる．そこで，$0 < b < a$ とする．Byczkowski et al (2006, 2007) は一般の場合に分布関数の表示を与えているが，最終形が複雑である．前回，分布関数の簡素な表示を報告したが，間違いがあったので，その訂正の意味もこめて，正しい結果を報告する．

第 2 種変形ベッセル関数 $K_\nu$ の零点を $\{z_{\nu,k}\}_{k=1}^{N(\nu)}$ とする．零点の個数 $N(\nu)$ は，$\nu - 1/2$ が整数のときは，$|\nu| - 1/2$ となり，整数でないときは $|\nu| - 1/2$ に最も近い偶数である．また，$\mathrm{Re}(z_{\nu,k}) < 0$ であることが知られている．$F_1^{(\nu)}$, $F_2^{(\nu)}$, $F_3^{(\nu)}$ を次の関数とする．

$$F_1^{(\nu)}(t) = \left(\frac{b}{a}\right)^{\nu+|\nu|} \int_0^t \frac{a-b}{\sqrt{2\pi s^3}} e^{-\frac{(a-b)^2}{2s}} ds$$

$$F_2^{(\nu)}(t) = -\left(\frac{b}{a}\right)^{\nu} \int_0^t \frac{a-b}{\sqrt{2\pi s^3}} e^{-\frac{(a-b)^2}{2s}} \left[\int_0^\infty \frac{L_{|\nu|,a/b}(x)}{x} e^{-\frac{x(a-b)\sqrt{t}}{b\sqrt{s}}} dx\right] ds$$

$$F_3^{(\nu)}(t) = -\left(\frac{b}{a}\right)^{\nu} \sum_{j=1}^{N(\nu)} \frac{K_\nu(az_{\nu,j}/b)}{z_{\nu,j}K_{\nu+1}(z_{\nu,j})} \int_0^t \frac{a-b}{\sqrt{2\pi s^3}} e^{-\frac{(a-b)^2}{2s} + \frac{z_{\nu,j}(a-b)\sqrt{t}}{b\sqrt{s}}} ds.$$

ただし，$L_{\mu,c}(x) = \dfrac{\cos(\pi\mu)\{I_\mu(cx)K_\mu(x) - I_\mu(x)K_\mu(cx)\}}{\{K_\mu(x)\}^2 + \pi^2\{I_\mu(x)\}^2 + 2\pi\sin(\pi\mu)K_\mu(x)I_\mu(x)}$ である．

定理２．$0 < b < a$ とする．（１）$\nu = \pm 1/2$ のとき，

$$P(\tau_{a,b}^{(\nu)} \leqq t) = F_1^{(\nu)}(t)$$

（２）$|\nu| < 3/2,\ \nu \neq \pm 1/2$ のとき，

$$P(\tau_{a,b}^{(\nu)} \leqq t) = F_1^{(\nu)}(t) + F_2^{(\nu)}(t)$$

（３）$\nu - 1/2 \in \mathbb{Z},\ \nu \neq \pm 1/2$ のとき，

$$P(\tau_{a,b}^{(\nu)} \leqq t) = F_1^{(\nu)}(t) + F_3^{(\nu)}(t)$$

（４）$\nu - 1/2 \notin \mathbb{Z},\ |\nu| > 3/2$ のとき，

$$P(\tau_{a,b}^{(\nu)} \leqq t) = F_1^{(\nu)}(t) + F_2^{(\nu)}(t) + F_3^{(\nu)}(t)$$

この定理から，$P(\tau_{a,b}^{(\nu)} > t)$ の $t \to \infty$ のときの漸近挙動が得られる．簡単のため，$f(t) = g(t) + h(t)\{1 + o(1)\}\ (t \to \infty)$ を $f(t) \sim g(t) + h(t)$ と書くことにする．

系．$0 < b < a$ とすると，$t \to \infty$ のとき次が成り立つ．

（１）$\nu = 0$ のとき，

$$P(\tau_{a,b}^{(0)} > t) \sim \frac{2\log(a/b)}{\log t}$$

（２）$\nu < 0$ のとき，

$$P(\tau_{a,b}^{(\nu)} > t) \sim C_1(\nu)t^\nu$$

（３）$\nu > 0$ のとき，

$$P(\tau_{a,b}^{(\nu)} > t) \sim 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{2\nu} + C_2(\nu)t^{-\nu}$$

ここでの $C_1(\nu)$, $C_2(\nu)$ は正の定数で具体的に表示できる．

# Stein method for invariant measures of diffusions via Malliavin calculus

Seiichiro Kusuoka
Research Fellow of the Japan Society for the Promotion of Science (PD)
(Joint work with Ciprian A. Tudor)

Nourdin and Peccati showed that by applying Stein's equation and Malliavin calculus we can measure the distance between the standard normal law and the distributions of random variables in $\mathbb{D}^{1,2}$ (the Sobolev space with respect to Malliavin derivative). This method is called Stein's method. And now, many mathematicians consider Stein's method with respect to other distributions instead of the standard normal law. For example, the Gamma distribution and the Pearson distribution. In this work, we consider the generalization of the method to more general distributions by using one-dimensional stochastic differential equations.

Let $S$ be the interval $(l, u)$ $(-\infty \le l < u \le \infty)$ and $\mu$ be a probability measure on $S$ with a density function $p$ which is continuous and strictly positive on $S$. Consider a continuous function $b$ on $S$ such that there exists $k \in (l, u)$ such that $b(x) > 0$ for $x \in (l, k)$, $b(x) < 0$ for $x \in (k, u)$, $bp$ is bounded on $S$ and

$$\int_l^u b(x)p(x)dx = 0.$$

Define

$$a(x) := \frac{2\int_l^x b(y)p(y)dy}{p(x)}, \quad x \in S.$$

Then, the stochastic differential equation:

$$dX_t = b(X_t)dt + \sqrt{a(X_t)}dW_t, \quad t \ge 0$$

has a unique Markovian weak solution which is ergodic with invariant density $p$ (see [1]).

For $f \in C_0(S)$ (the set of continuous functions on $S$ vanishing at the boundary of $S$), let $m_f := \int_l^u f(x)p(x)dx$ and define $\tilde{g}_f$ by, for every $x \in S$,

$$\tilde{g}_f(x) := \frac{2}{a(x)p(x)} \int_l^x (f(y) - m_f)p(y)dy = -\frac{2}{a(x)p(x)} \int_x^u (f(y) - m_f)p(y)dy.$$

Then, $g_f(x) := \int_0^x \tilde{g}_f(y)dy$ satisfies that $f - m_f = Ag_f$ and by the definition of $m_f$ we have

$$f(x) - \mathbf{E}[f(X)] = \frac{1}{2}a(x)\tilde{g}_f'(x) + b(x)\tilde{g}_f(x)$$

where $X$ is a random variable with its law $\mu$. This equation is called Stein's equation. When $\mu$ has the standard normal distribution, $S$, $a$ and $b$ can be chosen as $(-\infty, \infty)$, 2 and $-x$, respectively.

We can estimate the bounds of $g_f$ and $g_f'$ as follows.

**Proposition 1.** *Assume that there exist $l', u' \in (l, u)$ such that $b$ is non-increasing on $(l, l')$ and $(u', u)$. Consider $f : S \to \mathbb{R}$ such that $\tilde{g}_f$ is well-defined and $\|f\|_\infty := \sup_{x \in S} |f(x)| < \infty$. Then we have*

$$\begin{aligned} ||\tilde{g}_f||_\infty &\le C_1 ||f||_\infty \\ ||a\tilde{g}_f'||_\infty &\le C_2 ||f||_\infty \end{aligned}$$

*where $C_1$ and $C_2$ are strictly positive constants.*

**Proposition 2.** *Assume that if $u < \infty$, there exists $u' \in (l, u)$ such that $b$ is non-decreasing and Lipschitz continuous on $[u', u)$ and $\liminf_{x \to u} a(x)/(u - x) > 0$; if $u = \infty$, there exists $u' \in (l, u)$ such that $b$ is non-decreasing on $[u', u)$ and $\liminf_{x \to u} a(x) > 0$. Similarly, assume that if $l < \infty$, there exists $l' \in (l, u)$ such that $b$ is non-increasing and Lipschitz continuous on $(l, l']$ and*

$\liminf_{x\to l} a(x)/(x-l) > 0$; *if* $l=-\infty$, *there exists* $l' \in (l,u)$ *such that* $b$ *is non-decreasing on* $(l,l']$ *and* $\liminf_{x\to l} a(x) > 0$. *Then we have*

$$||\tilde{g}_f'||_\infty \le C_3(||f||_\infty + ||f'||_\infty)$$

*for* $f \in C_0^1(S)$ *where* $C_3$ *is a constant.*

We are now able to derive Stein's bound between the probability measure $\mu$ and the law of a random variable $Y$ in a certain class. Let $D$ be the Malliavin derivative, $D^*$ be the adjoint operator (the Skorohod integral operator) and $L := D^*D$ (the Ornstein-Uhlenbeck operator).

**Theorem 3.** *Assume* $X \sim \mu$ *and let* $Y$ *be an* $S$*-valued random variable in* $\mathbb{D}^{1,2}$ *with* $b(Y) \in \mathbb{D}^{1,2}$. *Then for every* $f : S \to \mathbb{R}$ *such that* $\tilde{g}_f, \tilde{g}_f'$ *are bounded,*

$$\begin{aligned}&|\mathbf{E}[f(Y)-f(X)]|\\ &\le ||\tilde{g}_f'||_\infty \mathbf{E}\left[\left|\mathbf{E}\left[\frac{1}{2}a(Y) + \langle DL^{-1}\left\{b(Y)-\mathbf{E}[b(Y)]\right\}, DY\rangle_H \middle| Y\right]\right|\right] + ||\tilde{g}_f||_\infty |\mathbf{E}\left[b(Y)\right]|.\end{aligned}$$

The bound in Theorem 3 is optimal in the following sense.

**Theorem 4.** *A random variable* $Y \in \mathbb{D}^{1,2}$ *with its values on* $S$ *has probability distribution* $\mu$ *if and only if* $\mathbf{E}[b(Y)] = 0$ *and*

$$\mathbf{E}\left[\frac{1}{2}a(Y) + \langle DL^{-1}b(Y), DY\rangle_H \middle| Y\right] = 0.$$

Consider a distance between distributions of random variables $F$ and $G$ on $S$ defined by

$$d_{\mathcal{H}}(\mathcal{L}(F), \mathcal{L}(G)) := \sup_{f\in\mathcal{H}} |\mathbf{E}[f(F)] - \mathbf{E}[f(G)]|, \tag{1}$$

where $\mathcal{L}(F)$ is the distribution of $F$ and $\mathcal{H}$ is a set of functions on $S$. By Theorem 3 we obtain an estimate for the distance between $X$ and $Y$ as follows:

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{H}}(\mathcal{L}(Y),\mu) \le \sup_{f\in\mathcal{F}} ||\tilde{g}_f'||_\infty \mathbf{E}\left[\left|\frac{1}{2}a(Y) + \langle DL^{-1}\left\{b(Y)-\mathbf{E}[b(Y)]\right\}, DY\rangle_H\right|\right] \\ + \sup_{f\in\mathcal{F}} ||\tilde{g}_f||_\infty |\mathbf{E}\left[b(Y)\right]|. \end{aligned} \tag{2}$$

There are many kind of distances between distributions defined by (1). For example, by taking $\mathcal{H} = \{1_{(l,z]}; z \in (l,u)\}$, one obtains the Kolmogorov distance; by taking $\mathcal{H} = \{f : ||f||_L \le 1\}$, where $||\cdot||_L$ denotes the usual Lipschitz seminorm, one obtains the Wasserstein (or Kantorovich-Wasserstein) distance; by taking $\mathcal{H} = \{f : ||f||_{BL} \le 1\}$, where $||\cdot||_{BL} = ||\cdot||_L + ||\cdot||_\infty$, one obtains the Fortet-Mourier (or bounded Wasserstein) distance; by taking $\mathcal{H}$ equal to the collection of all indicators $1_B$ of Borel sets, one obtains the total variation distance.

By (2) and Propositions 1 and 2, we have estimates for the distances above. When $\inf_{x\in S} a(x) > 0$, by using Proposition 1, we have estimates for all the distances in the example above. When $\inf_{x\in S} a(x) = 0$, by using Proposition 2, we have estimates for the Wasserstein distance and the Fortet-Mourier distance. Note that estimates for the Kolmogorov distance and the total variation distance are failed when $\inf_{x\in S} a(x) = 0$. If $Y$ is expressed as an explicit function of some Gaussian random variables, the bound in Theorem 3 can be calculated. Hence, we can apply these results to obtaining the order of convergence for sequence of functions of Gaussian random variables.

# References


[1] B.M. Bibby, I.M. Skovgaard and M. Sorensen, Diffusion-type models with given marginals and auto-correlation function, *Bernoulli*, **11**(2), 2003 , 191-220.

[2] Seiichiro Kusuoka and Ciprian A. Tudor, Stein method for invariant measures of diffusions via Malliavin calculus, arXiv:1109.0684v1.

# Short time kernel asymptotics for Young SDE driven by fBm by means of Watanabe distribution theory

Yuzuru Inahama (Nagoya University)

**要約**: ハースト指数 $H > 1/2$ のフラクショナル・ブラウン運動によって駆動されるヤング式 (確率) 微分方程式の解は、係数ベクトル場が例えば (準) 楕円性を持つ場合に密度関数 $p_t(a, a')$ を持つことが知られている。(例えば [1].) $t \searrow 0$ のとき、この $p_t(a, a')$ の漸近挙動を楕円性条件と悪くない追加条件のもとで、考察してみたい。既に対角の場合は [1] で、非対角の場合は [2] である程度は調べられているが、マリアヴァン解析における渡辺流の超関数の漸近理論 [3] を使えば、もっと手早く、もっと強い結果が示せる。なお [1, 2] とは違い、この論文では方程式 (1) にドリフト項をちゃんとつけている。意外かもしれないが、ドリフト項があると、漸近展開が格段に複雑になる。

Let $(w_t)_{t\ge 0} = (w_t^1, \ldots, w_t^d)_{t\ge 0}$ be the $d$-dimensional fractional Brownian motion (fBm) with Hurst parameter $H \in (1/2, 1)$. Let $V_i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ be $C_b^\infty$, that is, $V_i$ is a bounded smooth function with bounded derivatives of all order $(0 \le i \le d)$. We consider the following stochastic ODE in the sense of Young;

$$dy_t = \sum_{i=1}^d V_i(y_t) dw_t^i + V_0(y_t) dt \qquad \text{with} \qquad y_0 = a \in \mathbf{R}^n. \tag{1}$$

We will sometimes write $y_t = y_t(a) = y_t(a, w)$ etc. to make explicit the dependence on $a$ and $w$.

First, we assume the ellipticity of the coefficient of (1) at the starting point $a \in \mathbf{R}^n$.

**(A1):** The set of vectors $\{V_1(a), \ldots, V_d(a)\}$ linearly spans $\mathbf{R}^n$.

Under Assumption **(A1)**, the law of the solution $y_t$ has a density $p_t(a, a')$ with respect to the Lebesgue measure on $\mathbf{R}^n$ for any $t > 0$. Let $\mathcal{H} = \mathcal{H}^H$ be the Cameron-Martin space of fBm $(w_t)$. For $\gamma \in \mathcal{H}$, we denote by $\phi_t^0 = \phi_t^0(\gamma)$ be the solution of the following Young ODE;

$$d\phi_t^0 = \sum_{i=1}^d V_i(\phi_t^0) d\gamma_t^i \qquad \text{with} \qquad \phi_0^0 = a \in \mathbf{R}^n.$$

Set, for $a \neq a'$,

$$K_a^{a'} = \{\gamma \in \mathcal{H} \mid \phi_1^0(\gamma) = a'\}.$$

If we assume **(A1)** for all $a$, this set $K_a^{a'}$ is not empty. If $K_a^{a'}$ is not empty, it is a Hilbert submanifold of $\mathcal{H}$. It is known that $\inf\{\|\gamma\|_{\mathcal{H}} \mid \gamma \in K_a^{a'}\} = \min\{\|\gamma\|_{\mathcal{H}} \mid \gamma \in K_a^{a'}\}$. Now we introduce the following assumption;

**(A2):** $\bar\gamma \in K_a^{a'}$ which minimizes $\mathcal{H}$-norm exists uniquely.

In the sequel, $\bar\gamma$ denotes the minimizer in Assumption **(A2)**. We also assume that $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}^2/2$ is not so degenerate at $\bar\gamma$ in the following sense.

**(A3):** At $\bar\gamma$, the Hessian of the functional $K_a^{a'} \ni \gamma \mapsto \|\gamma\|_{\mathcal{H}}^2/2$ is strictly larger than $\mathrm{Id}_{\mathcal{H}^H}/2$ in the form sense. More precisely, If $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \ni u \mapsto f(u) \in K_a^{a'}$ is a smooth curve in $K_a^{a'}$ such that $f(0) = \bar\gamma$ and $f'(0) \neq 0$, then $(d/du)^2|_{u=0} \|f(u)\|_{\mathcal{H}}^2/2 > \|f'(0)\|_{\mathcal{H}}^2/2$.

Now,we introduce several index sets for the exponent of the small parameter $\varepsilon := t^H > 0$, which will be used in the asymptotic expansion. Unlike in the preceding papers, index sets in this paper are not (a constant multiple of) $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ and are rather complicated. Set $\Lambda_1 = \{n_1 + \frac{n_2}{H} \mid n_1, n_2 \in \mathbf{N}\}$. We denote by $0 = \kappa_0 < \kappa_1 < \kappa_2 < \cdots$ all the elements of $\Lambda_1$ in increasing order. Several smallest elements are explicitly given as follows; $\kappa_1 = 1, \quad \kappa_2 = \frac{1}{H}, \quad \kappa_3 = 2, \quad \kappa_4 = 1 + \frac{1}{H}, \quad \kappa_5 = 3 \wedge \frac{2}{H}, \ldots$ As usual, using the scale invariance (i.e., self-similarity) of fBm, we will study the scaled version of (1). From its explicit form, one can easily see why $\Lambda_1$ appears.

We also set $\Lambda_2 = \{\kappa - 1 \mid \kappa \in \Lambda_1 \setminus \{0\}\} = \{0, \frac{1}{H} - 1, 1, \frac{1}{H}, \left(3 \wedge \frac{2}{H}\right) - 1, \ldots\}$ and $\Lambda_2' = \{\kappa - 2 \mid \kappa \in \Lambda_1 \setminus \{0, 1, 1/H\}\} = \{0, \frac{1}{H} - 1, \left(3 \wedge \frac{2}{H}\right) - 2, \ldots\}$. Next we set

$$\Lambda_3 = \{a_1 + a_2 + \cdots + a_m \mid m \in \mathbf{N}_+ \text{ and } a_1, \ldots, a_m \in \Lambda_2\}.$$

In the sequel, $\{0 = \nu_0 < \nu_1 < \nu_2 < \cdots\}$ stands for all the elements of $\Lambda_3$ in increasing order. Similarly,

$$\Lambda_3' = \{a_1 + a_2 + \cdots + a_m \mid m \in \mathbf{N}_+ \text{ and } a_1, \ldots, a_m \in \Lambda_2'\}.$$

In the sequel, $\{0 = \rho_0 < \rho_1 < \rho_2 < \cdots\}$ stands for all the elements of $\Lambda_3'$ in increasing order. Finally, $\Lambda_4 = \Lambda_3 + \Lambda_3' = \{\nu + \rho \mid \nu \in \Lambda_3, \rho \in \Lambda_3'\}$. We denote by $\{0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots\}$ all the elements of $\Lambda_4$ in increasing order.

Below we state two main results of ours, which are basically analogous to the corresponding ones in Watanabe [3]. However, there are some differences. First, the exponents on the shoulder of $t$ are not (a constant multiple of) natural numbers. Second, cancellation of "odd terms" as in p. 20 and p. 34, [3] does not happen in general in our case. (If the drift term in Young ODE (1) is zero, then this kind of cancellation takes place as in [1, 2]).

The following is a short time asymptotic expansion of the diagonal of the kernel function. This is much easier than the off-diagonal case.

**Theorem 1** *Assume* **(A1)**. *Then, the diagonal of the kernel $p(t, a, a)$ admits the following asymptotics as $t \searrow 0$;*

$$p(t, a, a) \sim \frac{1}{t^{nH}} \left(c_0 + c_{\nu_1} t^{\nu_1 H} + c_{\nu_2} t^{\nu_2 H} + \cdots\right)$$

*for certain real constants $c_0, c_{\nu_1}, c_{\nu_2}, \ldots$. Here, $\{0 = \nu_0 < \nu_1 < \nu_2 < \cdots\}$ are all the elements of $\Lambda_3$ in increasing order.*

We also have off-diagonal short time asymptotics of the kernel function.

**Theorem 2** *Assume* **(A1)**–**(A3)**. *Then, we have the following asymptotic expansion as $t \searrow 0$;*

$$p(t, a, a') \sim \exp\Bigl(-\frac{\|\bar{\gamma}\|_{\mathcal{H}}^2}{2t^{2H}} + \frac{\beta}{t^{2H-1}}\Bigr) \frac{1}{t^{nH}} \bigl\{\alpha_{\lambda_0} + \alpha_{\lambda_1} t^{\lambda_1 H} + \alpha_{\lambda_2} t^{\lambda_2 H} + \cdots\bigr\}$$

*for certain real constants $\beta, \alpha_{\lambda_j}$ $(j = 0, 1, 2, \ldots)$. Here, $\{0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots\}$ are all the elements of $\Lambda_4$ in increasing order.*

# References


[1] Baudoin, F.; Hairer, M.; Probab. Theory Related Fields 139 (2007), no. 3-4, 373–395.

[2] Baudoin, F.; Ouyang, C.; Stochastic Process. Appl. 121 (2011), no. 4, 759–792.

[3] Watanabe, S.; Ann. Probab. 15 (1987), no. 1, 1–39.

# Bakry-Émery 型微分評価と関連する話題[*1]

桒田 和正[*2]

お茶の水女子大学人間文化創成科学研究科

## 1 Bakry-Émery の微分評価とは

一般に，生成作用素 $\mathcal{L}$ を持つ半群 $P_t = \mathrm{e}^{t\mathcal{L}}$ に対して，“Bakry-Émery の ($L^p$-) 微分評価” とは，次の形の評価を指す：

$$|\nabla P_t f|(x) \le \mathrm{e}^{-Kt} P_t(|\nabla f|^p)(x)^{1/p} \quad \text{a.e.}x, \tag{$G_p$}$$

$$\|\nabla P_t f\| \le \mathrm{e}^{-Kt} \|\nabla f\|_\infty \tag{$G_\infty$}$$

ここで，$K \in \mathbb{R}$ と $p \in [1, \infty)$ は $f$,$x$ に無関係な定数．勿論，“微分 $\nabla$”(より正確には，$|\nabla f|$) の意味は，問題設定 ($P_t$ を定義する土台となる状態空間の構造) により変わってくる．$P_t$ が (推移確率による) 積分として与えられる場合には $p > p'$ のとき，Hölder の不等式から「$(G_{p'}) \Rightarrow (G_p)$」が容易に従うことを注意しておく．以下，この § では，$(G_p)$(特に $(G_2)$ と $(G_1)$) に関する基本的な事実について，仮定の詳細を省略した形で述べる．正確な主張を把握するための概説論文として，ここでは [3, 4, 15] を挙げておく．

関数不等式 $(G_p)$ は Bakry とÉmery により研究が始められた．彼らの定式化では，$\mathcal{L}$ として強局所的かつ Markov 的な生成作用素とし (多くの場合，対称性も仮定する)，微分 $|\nabla f|$ に相当するものとして，次で定める平方場作用素 (carré du champ) $\Gamma(f, f)$ の平方根を用いる：

$$\Gamma(f, g) = \frac{1}{2} \left( \mathcal{L}(fg) - f\mathcal{L}g - (\mathcal{L}f)g \right).$$

Euclid 空間，あるいはより一般に Riemann 多様体上で，$\mathcal{L} = \Delta + Z$ ($Z$ はベクトル場) の場合には，$\Gamma(f, f) = |\nabla f|^2$ となる．よって，実際に $\Gamma(f, f)^{1/2}$ は通常の微分 (のノルム) の拡張といえる．

このとき，代数的な関係式 $\partial_t P_t f = \mathcal{L}f$，$\mathcal{L}$ と $\Gamma$ に関する derivation property および $\Gamma(f, f)$ の定義を結合することで，不等式 $(G_p)$ は，解析学，特に関数不等式に関し幅広い応用を持つ．例えば，

- $(G_2) \Rightarrow$ Poincaré 不等式: $P_t(f^2) - (P_t f)^2 \le \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-2Kt}}{K} P_t(\Gamma(f, f))$,

  $\Rightarrow$ 逆向き Poincaré 不等式: $\dfrac{1 - \mathrm{e}^{-2Kt}}{K} \Gamma(P_t f, P_t f) \le P_t(f^2) - (P_t f)^2$,
- $(G_1) \Rightarrow$ 対数 Sobolev 不等式: $P_t(f^2 \log(f^2)) - (P_t f)^2 \log(P_t f)^2 \le \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-2Kt}}{K} P_t(\Gamma(f, f))$

が成り立つ．右辺の定数は指数関数 $\mathrm{e}^{-2Ks}$ を 0 から $t$ まで積分したものであることを注意しておく．$K > 0$ で，$P_t f$ が $t \to \infty$ で $P_t$ の不変測度による積分に収束するとき，Poincaré 不等式および対数 Sobolev 不等式は，通常の (全空間での)Poincaré 不等式あるいは対数 Sobolev 不等式を導く．他の応用としては，

---

*1 研究集会「確率解析とその周辺」(2011 年 11 月 11 日-11 月 13 日) 講演予稿

*2 URL: `http://www.math.ocha.ac.jp/kuwada` e-mail: `kuwada.kazumasa@ocha.ac.jp`

- Riesz 変換の $L^p$-有界性 ([12]，およびその参考文献を参照):

$$\|\Gamma(\sqrt{\alpha-\mathcal{L}}f,\sqrt{\alpha-\mathcal{L}}f)^{1/2}\|_p \le C_p\|f\|_p,$$

- Wang 型の (dimension-free) Harnack 不等式 ([21, 22, 24] 等): 各 $\alpha>1$ で

$$|P_tf(x)|^\alpha \le P_t(|f|^\alpha)(y)\exp\left(\frac{K\alpha d(x,y)^2}{2(\alpha-1)(\mathrm{e}^{2Kt}-1)}\right)$$

などがある．また，$(G_p)$ は $t=0$ では等式となることを利用して $(G_2)$ を $t=0$ で (形式的に) 微分すると，いわゆる $\Gamma_2$-条件

$$\Gamma_2(f,f)\ge K\Gamma(f,f), \tag{$\Gamma_2(K)$}$$

$$\Gamma_2(f,f):=\frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\Gamma(f,g)-\Gamma(\mathcal{L}f,g)-\Gamma(f,\mathcal{L}g)\right)$$

を得る．これを逆に $t$ について積分することで，$(G_2)$ と $(\Gamma_2(K))$ は同値になることが分かる．一方，$\Gamma_2$-条件から $(G_1)$ を示したことが Bakry-Émery の重要な仕事と言える (前述の注より，多くの場合「$(G_1)\Rightarrow(G_2)$」は容易だが逆は明らかではない)．ただし，この部分の議論では，これ以前に述べた結果を得る時よりもずっと強い仮定 (各種操作で不変な core の存在) が必要になる．

Riemann 多様体上で $\mathcal{L}=\Delta+\nabla V\cdot\nabla$ のとき，いわゆる Bochner-Weitzenböck の公式を用いると

$$\Gamma_2(f,f)=\mathrm{Ric}(\nabla f,\nabla f)+\mathrm{Hess}\,V(\nabla f,\nabla f)+\|\mathrm{Hess}\,f\|_{\mathrm{HS}}^2$$

を得る (Ric は，Ricci 曲率．$\|\cdot\|_{\mathrm{HS}}$ は，Hilbert-Schmidt ノルム)．特に Euclid 空間では Ric の項は消える．この式で，各点 $x$ 毎に，$f$ の $x$ での 2 回微分が消えるような関数を考える ($\Rightarrow \|\mathrm{Hess}\,f\|_{\mathrm{HS}}(x)=0$) ことで，$(\Gamma_2(K))$ と $\mathrm{Ric}+\mathrm{Hess}\,V\ge K$ が同値になることが分かる．このように，$\Gamma_2$-条件を経由して，Bakry-Émery の微分評価は幾何学的な性質 (Ricci 曲率が下に有界) とも対応している．

また，半群 $P_t$ が確率微分方程式の解として与えられる場合などに，確率論的な手法 (確率過程の結合法) を通じて，条件 $\mathrm{Ric}+\mathrm{Hess}\,V\ge K$ から $\Gamma_2$-条件を経由せずにBakry-Émery の微分評価を導けることがある．この観点を押し進めることで，次節に扱う Wasserstein 距離の Lipschitz 評価と Bakry-Émery の微分評価との対応へと至る．

## 2 Wasserstein 距離の Lipschitz 評価と Bakry-Émery 型微分評価

$(X,d)$ を完備可分測地距離空間とする．ここで「測地」とは，各 $x,y\in X$ に対して，$\gamma:[0,1]\to X$ で $d(\gamma(s),\gamma(t))=|s-t|d(x,y)$ を各 $s,t\in[0,1]$ でみたすもの (弧長パラメータづけされた測地線) が存在することを意味する．このような空間では，“微分” として，局所 Lipschitz 定数

$$|\nabla_d f|(x):=\limsup_{r\downarrow 0}\sup_{y;0<d(x,y)\le r}\frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)}$$

が取れる．また，前節の半群 $P_t$ に対応するものとして，Markov 核 $P_x\in\mathcal{P}(X)$ $(x\in X)$ を考える．ここで，少し一般の状況を想定して，$X$ 上の別の測地距離 $\tilde{d}$ を用意する (前節の状況では，$\tilde{d}=\mathrm{e}^{-Kt}d$ に相当する)．この状況で，Bakry-Émery 型の $L^p$-微分評価を次のように定式化する：

$$|\nabla_{\tilde{d}}Pf|(x)\le P(|\nabla_d f|^p)(x)^{1/p}\quad x\in X \tag{$G'_p$}$$

$$\|\nabla_{\tilde{d}}Pf\|_\infty\le\|\nabla_d f\|_\infty. \tag{$G'_\infty$}$$

また，前節の最後に述べた確率過程の結合法に対応する概念として，$p \in [1,\infty]$ および $\mu,\nu \in \mathcal{P}(X)$ に対して，$L^p$-Wasserstein 距離 $W_{d,p}(\mu,\nu)$ を以下で導入する：

$$W_{d,p}(\mu,\nu) := \inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} \|d\|_{L^p(\pi)},$$

ここで，$\Pi(\mu,\nu)$ は $\mu$ と $\mu$ のカップリングの全体，すなわち，

$$\Pi(\mu,\nu) := \left\{ \pi \in \mathcal{P}(X\times X) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{各可測集合 } A\subset X \text{ で} \\ \pi(A\times X)=\mu(A), \pi(X\times X)=\nu(A) \end{array} \right\}.$$

このとき，Markov 核 $(P_x)_{x\in X}$ に対する $L^p$-Wasserstein 距離の Lipschitz 評価を以下のように定式化する：

$$W_{d,p}(P^*\mu, P^*\nu) \le W_{\tilde{d},p}(\mu,\nu). \tag{$W_p$}$$

この定式化の下で，以下の双対性が成立する：

> 定理[cf. [14]]
> 各 $p,q\in[1,\infty]$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ に対し，$(G_p')$ と $(W_q)$ は同値.

$(G_q') \Rightarrow (W_q)$ の証明には，Wasserstein 距離の双対表示 (Kantorovich 双対性) を用いる．その際に，Hopf-Lax 半群 (Moreau-吉田近似／ Hamilton-Jacobi 半群) と呼ばれる，次の概念が自然に表われる．$p\in(1,\infty)$, $f: X\to\mathbb{R}$, $t>0$ に対して，$Q_t f: X\to\mathbb{R}$ を以下で定める:

$$Q_t f(x) := \inf_{y\in X}\left( f(y) + \frac{t}{p}\left(\frac{d(x,y)}{t}\right)^p \right).$$

$X$ 上の有界かつ Lipschitz 連続な関数の全体を $C_b^{\mathrm{Lip}}(X)$ と書く．定理の証明に用いる $Q_t f$ の性質として，$f\in C_b^{\mathrm{Lip}}(X)$ に対し以下が成り立つ:

$$\begin{aligned} |Q_t f(x) - Q_t f(y)| &\le \|\nabla f\|_\infty, \\ |Q_s f(x) - Q_t f(x)| &\le \frac{1}{q}\|\nabla f\|_\infty^q \cdot |t-s|, \\ \partial_t Q_t f + \frac{1}{q}|\nabla Q_t f|(x)^q &\le 0. \end{aligned}$$

Bakry-Émery 型微分評価 $(G_p')$ に比べ，Wasserstein 距離の Lipschitz 性 $(W_p)$ は微分を含まない点で，各種の操作に対してより安定と考えられる．実際に，

- (Markov 核が半群 $P_t$ で与えられる場合の) 従属操作に対する安定性
- 2 つの空間で $(W_2)$ をみたせば，その直積空間上に自然に定まる Markov 核でも $(W_2)$ が成立

などが直ちに分かる ($(G_p')$ でも同様の性質は既知かもしれないが).

## 3 関連する話題と課題

(1) $(G_p)$ と $(G_p')$ で現れる "微分" は，前者は半群の生成作用素を通じて定まり，後者は空間の距離構造に因る．これらは どのような場合に一致 するのだろうか？ Bakry やÉmery の研究成果と $(W_p)$ を結合するためには，この疑問は避けて通れない．この問への解答として，文献 [1, 13, 19] を挙げておく．特に [13] は Dirichlet 形式を出発点として，この問題を詳しく論じている．ただし，(局所)Poincaré 不等式や volume doubling 条件などを仮定するため，無限

次元空間は範疇に入っていない．[1] は，問題の定式化が若干異なる．その点を補間する意味で，合わせて [2] も参照されたい．そこでは，「Ricci 曲率が下に有界」の概念の一般化を通じて，滑らかではない空間での Bakry-Émery の微分評価についても調べられている．

(2) $p > p'$ のとき，$(G_p) \Rightarrow (G_{p'})$ はどのような条件の下で成り立つのだろうか？ 対数 Sobolev 不等式への応用など，実際に $(G_1)$ と $(G_p)$ $(p > 1)$ で役割の異なる場合があり，この問は無視できない．Bakry と Émery の議論に従えば，$(G_2)$ から $\Gamma_2$-条件を経て $(G_1)$ が得られる (例えば [4, 15]) が，この方法は "良い core の存在" を必要とするため，通常の意味で "滑らかな関数" の定義できないような空間 (殆どの無限次元空間や測度距離空間) では，その適用可能性は非自明 (長年の問未解決) である．なお，Riemann 多様体上の熱半群については，どんな $p \in [1, \infty]$ でも $(G_p)$ から $(G_1)$ が従う [20]．その一方で，**SDE** の解に問題を制限しても，$(G_2)$ は成立するが $(G_1)$ が不成立の場合がある [23]．

(3) 生成作用素が準楕円型の場合で，§1 で述べたものとは異なる形の Bakry-Émery 型評価

$$|\nabla P_t f|(x) \le C_p \mathrm{e}^{-Kt} P_t(|\nabla f|^p)(x)^{1/p} \qquad (\tilde{G}_p)$$

が成り立つ例が知られている [5, 6, 9, 10, 16, 17]．これらの結果はモデル固有の対称性に因るところが大きく，$(\tilde{G}_p)$ の，汎用性のある十分条件 は知られていない．ここで $C_p > 1$ であり，その結果として，この微分評価は ($p = 2$ の場合でも) $\Gamma_2$-条件とは直接対応しない．別の言葉で言えば，この不等式は，時間について **infinitesimal** な評価の積分として得られる形ではない．従って，項目 (2) の問は，良い core があるにも関わらず非自明である．実際，これらの結果を含む範疇で，準楕円型生成作用素に対応する $\Gamma_2$ 条件 (あるいは曲率次元条件) の一般化が Baudoin,Garofalo らによって展開されている [7, 8] が，Bakry-Émery 型の微分評価は議論されていない．一方，§2 の同値性は有効に機能する．これを有効に使えればいいのかもしれないが，この方面でもっとも簡単なモデルである Heisenberg 群上の拡散過程の場合ですら，§2 の同値性以外の方法での $(W_p)$ の証明は知られていない．

(4) §2 の定式化において，Markov 核 $P_x \in \mathcal{P}(X)$ を考える際，点 $x$ の動く範囲は $X$ とは別の空間であっても，全ての議論は完全に機能する．より具体的には，別の距離空間 $(\tilde{X}, \tilde{d})$ をとり，$P_x \in \mathcal{P}(X)$ $(x \in \tilde{X})$ という状況が考えられる．この 拡張の結果，何らかの新しい応用 が可能だろうか？ 別の空間を扱う状況として，例えば以下が想定できる:

- 写像による Markov 核の押し出し (調和写像関連の問題を考えるときは自然な設定)
- $\tilde{X}$ を初期値の集合 (状態空間) とし，$X$ を，$\tilde{X}$ 上の経路空間とする．このとき，経路空間上の (分布の意味での) 確率過程と Markov 核が対応する．こうすると，対応する性質 $(W_p)$ は，確率過程の見本路の分布のカップリングに関する問題になる．Markov 核を半群と対応させる，§2 で言及した視点では，「各時刻 $t$ での確率過程の分布」のカップリングしか考えていなかった形になるので，確率論的な観点から，ここで提示した枠組みで何かが分かるかどうかには興味がある．

(5) $(G'_p)$ と $(W_p)$ の同値性を示す際には，Bakry-Émery の元々の議論と異なり，半群 (に対応する Dirichlet 形式，あるいは $\Gamma$) の強局所性 (と，そこから従う derivation property) を利用しない．実際，従属操作を通じて，非局所的な場合 にも $(G_p)$ に相当する評価が導出できる．この評価には何か応用の可能性はあるだろうか？ また，従属操作に限らず非局所的な場合に $(G_p)$ に相当する不等式を導く方法はあるだろうか？ そもそも，どのような不等式が「適切な」定式化なのであろうか？

(6) 空間と Markov 核の列 に対して，各々が $(G_p)$ を (何らかの意味で一様に) みたしている場合，$(G_p)$ は極限でも成り立つ だろうか？ このような問題の典型的な応用例として，無限次元空間上の確率過程の有限次元近似が考えられる．前述の定理を用いて $(W_p)$ に書き換えれば，そちらの方が極限移行とは相性がよいと考えられる (前述のように，こちらの概念は微分を含まないため)．

(7) 無限次元空間 上で，これらの理論は何処まで有効だろうか？ §1, §2 とも，特に次元には制約はない．しかし，例えば §1 の，Bakry-Émery による「$(\Gamma_2(K)) \Rightarrow (G_1)$」の議論を適用できる状況は，極めて限定的である．また，§2 では，主として扱う距離が退化した擬距離になる (Wiener 空間での Cameron-Martin ノルムから決まるものなど) ため，取り扱いには注意が必要になる．勿論 Markov 核についても，典型的には quasi-everywhere でしか定義できないなどの変化が生ずる．一方，Hopf-Lax 半群については，[1] の §3 で，無限次元空間も視野に入れた，かなり一般的な枠組で議論されている．無限次元空間上の Wasserstein 距離や Hopf-Lax 半群の技術的な困難については，[11, 18] も参照した方がよいと思われる．§2 の議論がうまく機能するとしても，(1) の問題は，一般的な解答は (私の知る限り) 無限次元では知られていないので，この点も考えないといけない．

# 参考文献


[1] L. Ambrosio, N. Gigli, and G. Savaré. Calculus and heat flow in metric measure spaces and applications to spaces with Ricci bounds from below. preprint. arXiv:1106.2090.

[2] L. Ambrosio, N. Gigli, and G. Savaré. Metric measure spaces with Riemannian Ricci curvature bounded from below. preprint. arXiv:1109.0222.

[3] C. Ané, S. Blachère, D. Chafaï, P. Fougères, I. Gentil, F. Malrieu, C. Roberto, and G. Scheffer. *Sur les inégalités de Sobolev logarithmiques.* Panoramas et synthèses, 10. Société Mathématique de France, Paris, 2000.

[4] D. Bakry. On Sobolev and logarithmic Sobolev inequalities for Markov semigroups. In *New trends in stochasitic analysis*, pages 43–75, Charingworth, 1994, 1997. World Sci. Publ. River Edge, NJ.

[5] D. Bakry, F. Baudoin, M. Bonnefont, and D. Chafaï. On gradient bounds for the heat kernel on the Heisenberg group. *J. Funct. Anal.*, 255(8):1905–1938, 2008.

[6] F. Baudoin and M. Bonnefont. The subelliptic heat kernel on $\mathbf{SU}(2)$: Representations, asymptotics and gradient bounds. to appear in Math. Z.;arXiv:0802.3320.

[7] F. Baudoin, M. Bonnefont, and N. Garofalo. A sub-Riemannian curvature-dimension inequality, volume doubling property and the Poincaré inequality. preprint. arXiv:1007.1600.

[8] F. Baudoin and Garofalo. Curvature-dimension inequalities and Ricci lower bounds for sub-Riemannain manifolds with transverse symmetries. preprint. arXiv:1101.3590.

[9] B. Driver and T. Melcher. Hypoelliptic heat kernel inequalities on the Heisenberg group. *J. Funct. Anal.*, 221(5):340–365, 2005.

[10] N. Eldredge. Gradient estimates for the subelliptic heat kernel on H-type groups. preprint; arXiv:0904.1781.

[11] D. Feyel and A.S. Üstünel. Monge-Kantorovich measure transportation and Monge-Ampère equation on wiener space. *Probab. Theory Related Fields*, 128(3):347–385, 2004.

[12] H. Kawabi and T. Miyokawa. The Littlewood-Paley-Stein inequality for diffusion processes on general metric spaces. *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, 14(1):1–30, 2007.

[13] P. Koskela and Y. Zhou. Geometry and analysis of Dirichlet forms. preprint. Available at `http://www.bicmr.org/uploadfile/2011/0905/20110905093550372.pdf`.

[14] K. Kuwada. Duality on gradient estimates and Wasserstein controls. *J. Funct. Anal.*, 258(11):3758–3774, 2010.

[15] M. Ledoux. The geometry of Markov diffusion generators. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 9(2):305–366, 2000.

[16] H.-Q. Li. Estimation optimale du gradient du semi-groupe de la chaleur sur le groupe de heisenberg. *J. Funct. Anal.*, 236(2):369–394, 2006.

[17] T. Melcher. Hypoelliptic heat kernel inequalities on Lie groups. *Stochastic Process. Appl.*, 118(3):368–388, 2008.

[18] J. Shao. Hamilton-jacobi semigroups in infinite dimensional spaces. *Bull. Sci. Math.*, 130:720–738, 2006.

[19] K.-Th. Sturm. Is a diffusion process determined by its intrinsic metric? *Chaos, Solitons Fractals*, 8(11):1855–1860, 1997.

[20] M.-K. von Renesse and K.-Th. Sturm. Transport inequalities, gradient estimates, entropy and Ricci curvature. *Comm. Pure. Appl. Math.*, 58(7):923–940, 2005.

[21] F.-Y. Wang. On estimation of the logarithmic Sobolev constant and gradient estimates of heat semigroups. *Probab. Theory Related Fields*, 108(1):87–101, 1997.

[22] F.-Y. Wang. Equivalence of dimension-free Harnack inequality and curvature condition. *Integ. equ. oper. theory*, 48:547–552, 2004.

[23] F.-Y. Wang. A character of the gradient estimate for diffusion semigroups. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 133(3):827–834, 2005.

[24] F.-Y. Wang. *Functional inequalities, Markov semigroups, and spectral theory.* Mathematics Monograph Series 4. Science Press, Beijing, China, 2005.

# Density of stochastic differential equations driven by gamma processes

Atsushi TAKEUCHI* (Osaka City University)

November 12, 2011

Let $a$, $b > 0$ be constants, and fix $T > 0$. Let $J^i = \{J^i_t\,;\, t \in [0,T]\}$ $(1 \le i \le d)$ be $(a,b)$-gamma processes, that is, the process $J^i$ is a one-sided pure-jump Lévy process without Gaussian component with the Lévy measure

$$\nu(dz) = g(z)dz, \quad g(z) = az^{-1}e^{-bz}, \quad z \in (0,+\infty),$$

and its characteristic function of the marginal for time $t \in [0,T]$ is

$$\mathbb{E}\big[e^{\sqrt{-1}\xi J^i_t}\big] = \big(1 - \sqrt{-1}\xi/b\big)^{-at}.$$

Suppose that the processes $J^1, \ldots, J^d$ are mutually independent. The marginal $J^i_t$ at time $t \in [0,T]$ has the density function in closed form:

$$p^{J^i}_t(y) = b^{at}y^{at-1}e^{-by}/\Gamma(at), \quad y \in [0,+\infty).$$

Let $A_i \in C^\infty_b(\mathbb{R}^d\,;\,\mathbb{R}^d)$ $(0 \le i \le d)$ with the invertible condition:

$$\inf_{y \in \mathbb{R}^d} \inf_{z \in (0,+\infty)} |\det(I_d + \partial A_i(y)\,z)| > 0 \quad (1 \le i \le d).$$

For a non-random point $x \in \mathbb{R}^d$, we shall consider the $\mathbb{R}^d$-valued process $\{X_t\,;\, t \in [0,T]\}$ determined by the stochastic differential equation of the form:

$$dX_t = A_0(X_t)\,dt + A(X_{t-})\,dJ_t, \quad X_0 = x, \tag{1}$$

where $A = \big(A_1, \ldots, A_d\big)$ and $J_t = \big(J^1_t, \ldots, J^d_t\big)$. Then, there exists a unique solution $\{X_t\,;\, t \in [0,T]\}$ to (1) such that, for each $t \in [0,T]$, the function $\mathbb{R}^d \ni x \longmapsto X_t \in \mathbb{R}^d$ has a $C^\infty$-modification, and its Jacobi matrix is invertible a.s. In this talk, we shall focus on the sensitivity, and the error estimate on the densities between the solution and the driving gamma process. This is based upon joint work with Vlad Bally (Université Paris-Est Marne-la-Vallée, France).

Let $C_1 > 0$ be a constant, and $\Xi \in C^\infty_b(\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d\,;\,[0,1])$ such that

$$\Xi(B) = 0 \ (0 \le |\det B| \le C_1/2), \quad \Xi(B) = 1 \ (|\det B| \ge C_1).$$

The Girsanov transform leads to get the integration by parts formula for $X_T$.

*E-mail address: `takeuchi@sci.osaka-cu.ac.jp`.

**Theorem 1** *For $\varphi \in C_b^1(\mathbb{R}^d\,;\,\mathbb{R})$, the following equality holds:*

$$\mathbb{E}\big[\partial_k\varphi(X_T)\,\Xi(V_T^X)\big] = \mathbb{E}\big[\varphi(X_T)\,\Theta_k(X_T,\Xi(V_T^X))\big]$$

*for $1 \le k \le d$, where $V_T^X$ is the Malliavin covariance matrix for $X_T$.*

Suppose the uniformly elliptic condition on $A_i$ $(1 \le i \le d)$:

$$\inf_{\zeta\in\mathbb{S}^{d-1}}\ \inf_{y\in\mathbb{R}^d}\zeta\cdot A(y)\,A(y)^*y \ge C_2,$$

under which there exists a $C^\infty$-density for $X_T$ with respect to the Lebesgue measure on $\mathbb{R}^d$ via Theorem 1. Using Theorem 1 also enables us to see that

**Theorem 2** *It holds that*

$$\frac{\mathbb{E}\big[\mathbb{I}_{(X_T\in dy)}\,\Xi(V_T^X)\big]}{dy} = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^d \partial_k Q_d(X_T-y)\,\Theta_k(X_T,\Xi(V_T^X))\right],$$

*where $Q_d$ is the fundamental solution to the equation $\Delta Q_d = \delta_0$.*

We shall rewrite the equation (1) as follows:

$$\begin{aligned} X_T &= \big\{x + A(x)J_T\big\} + \left\{\int_0^T A_0(X_s)ds + \int_0^T \big(A(X_{s-}) - A(x)\big)dJ_s\right\} \\ &=: G_T + R_T. \end{aligned}$$

Let $C_3 > 0$ be a constant, and $\psi_{1,i} \in C_b^\infty([0,+\infty)\,;\,[0,1])$ $(1 \le i \le d)$ with

$$\psi_{1,i}(u_i) = 1\ (u_i \ge C_3), \quad \psi_{1,i}(u_i) = 0\ (u_i \le C_3/2).$$

Define $\psi_1(u) = \prod_{i=1}^d \psi_{1,i}(u_i)$ and $p_T^J(u) = \prod_{i=1}^d p_T^{J^i}(u_i)$ for $u = (u_1,\ldots,u_d)$.

**Theorem 3** *It holds that*

$$p_T^X(y) \ge \tilde{p}_T^G(y) - \mathcal{E}_T,$$

*where*

$$\begin{aligned} \tilde{p}_T^G(y) &= \psi_1\big(A(x)^{-1}(y-x)\big)p_T^J\big(A(x)^{-1}(y-x)\big), \\ \mathcal{E}_T &= C_4\big(|R_T|_p + \|V_T^{\tilde{R}}\|_p + \|H_T^{\tilde{R}}\|_p\big). \end{aligned}$$

# References


[1] V. Bally and L. Caramellino: Riesz transform and integration by parts formulas for random variables, *Stochastic Process Appl.*, **121**, 1332–1355 (2011).

[2] V. Bally and A. Takeuchi: Lower bounds for densities of stochastic differential equations driven by gamma processes, preprint.

[3] J. M. Bismut: Calcul des variations stochastique et processus de sauts, *Z. Wharsch. verw. Gebiete*, **63**, 147–235 (1983).

[4] R. Kawai and A. Takeuchi: Greeks formulas for an asset price model with gamma processes, *Math. Finance*, **21**, 723–742 (2011).

# nearly stable process の加法汎函数に対する大偏差原理

長岡工業高等専門学校 一般教育科　田原 喜宏[1]

「確率解析とその周辺」

於 佐賀大学

2011 年 11 月 11〜13 日

本講演では, neary stable process という対称 $\alpha$ 安定過程を含む対称 Lévy 過程のスペクトル関数の微分可能性及び, 加法汎函数の大偏差原理について述べる.

$\mathbf{M} = (X_t, \mathbb{P}_x)$ を表象 $p(\xi) = |\xi|^\alpha l(|\xi|^2)$, $(0 < \alpha < 2, \xi \in \mathbb{R}^d)$ を持つ $\mathbb{R}^d$ 上の対称 Lévy 過程とする．ここで $l(\cdot)$ は無限遠方で緩変動であるような関数である．すなわち, $\lim_{\lambda\to\infty} l(t\lambda)/l(\lambda) = 1$, $(t > 0)$ を満たす．このような Lévy 過程 $\mathbf{M}$ を **nearly stable process** という．$l \equiv 1$ のとき, $\mathbf{M}$ は対称 $\alpha$ 安定過程である.

$\{P_t\}_{t>0}$ を $\mathbf{M}$ の推移半群 $P_t f(x) = \mathbb{E}_x[f(X_t)] = \int_{\mathbb{R}^d} p(t,x,y)f(y)dy$, $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ を $\mathbf{M}$ に対応する **Dirichlet 形式**:

$$\begin{cases} \mathcal{F} = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^d) : \lim_{t\to 0} \dfrac{1}{t}(u - P_t u, u) < \infty \right\}, \\ \mathcal{E}(u,v) = \lim_{t\to 0} \dfrac{1}{t}(u - P_t u, v), \quad u, v \in \mathcal{F} \end{cases}$$

とする．$(\mathcal{E}^{(\alpha)}, \mathcal{F}^{(\alpha)})$ を $\alpha$ 安定過程に対応する Dirichlet 形式とすると, 次の評価が成立する.

**定理 1.** $\mathcal{E}_1(u,u) = \mathcal{E}(u,u) + (u,u)$ とする.

(i) $\lim_{\lambda\to\infty} l(\lambda) = +\infty$, $\alpha < \alpha' < 2 \Longrightarrow \exists C_l, C_{\alpha'} > 0$, $C_l \mathcal{E}_1^{(\alpha)}(u,u) \le \mathcal{E}_1(u,u) \le C_{\alpha'} \mathcal{E}_1^{(\alpha')}(u,u)$.

(ii) $\lim_{\lambda\to\infty} l(\lambda) = \gamma > 0 \Longrightarrow \exists C_\gamma > 0$, $C_\gamma^{-1} \mathcal{E}_1^{(\alpha)}(u,u) \le \mathcal{E}_1(u,u) \le C_\gamma \mathcal{E}_1^{(\alpha)}(u,u)$.

(iii) $\lim_{\lambda\to\infty} l(\lambda) = 0$, $0 < \alpha'' < \alpha \Longrightarrow \exists C_l, C_{\alpha''} > 0$, $C_{\alpha''} \mathcal{E}_1^{(\alpha'')}(u,u) \le \mathcal{E}_1(u,u) \le C_l \mathcal{E}_1^{(\alpha)}(u,u)$.

$\mathbb{R}^d$ 上の測度 $\mu$ が**滑らか**であるとは, 任意の $\gamma$ 超過関数 $g$ $(\gamma \ge 0)$ と正の Borel 可測関数 $f$ に対し,

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}_x \left[ \int_0^t f(X_s) dA_s^\mu \right] g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(x)d\mu$$

となる正値連続加法汎函数 $A_t^\mu$ が存在することを言う．この $\mu$ と $A_t^\mu$ の対応を **Revuz 対応**という.

$$G_\alpha(x,y) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} p(t,x,y)dt,$$

$G_0(x,y) = G(x,y)$ とおく．滑らかな測度 $\mu$ に対し, $\mu$ の $\alpha$ **ポテンシャル** $G_\alpha\mu(x)$ を

$$G_\alpha\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^d} G_\alpha(x,y)\mu(dy).$$

で定義する．滑らかな測度 $\mu$ に対し $\mu_R(\cdot) = \mu(B(R) \cap \cdot)$, $\mu_{R^c}(\cdot) = \mu(B(R)^c \cap \cdot)$ とおく．ここで $B(R)$ は原点中心, 半径 $R$ の開球である.

**定義 1.** $\mu$ を $\mathbb{R}^d$ 上の滑らかな正 Radon 測度とする.

(1) $\lim_{\alpha\to\infty} \|G_\alpha\mu\|_\infty = 0$ のとき, $\mu$ は**加藤クラス**に属するという.

(2) 加藤クラスに属する測度 $\mu$ が

$$\lim_{R\to\infty} \|G\mu_{R^c}\|_\infty = 0, \quad (\mathbf{M} \text{ が過渡的な場合})$$
$$\lim_{R\to\infty} \|G_1\mu_{R^c}\|_\infty = 0, \quad (\mathbf{M} \text{ が再帰的な場合})$$

を満たすとき, $\mu$ は **Green 緊密な加藤クラス**に属するという (以下, $\mu \in \mathcal{K}_\infty$ と略記する).

[1]本研究は土田兼治氏 (防衛大) との共同研究である

(3) $\mathbf{M}$ は過渡的とする．滑らかな正測度 $\mu$ が, 任意の $\epsilon > 0$ に対しある $\mu$ 有限な Borel 集合 $K = K(\epsilon)$ と $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ が存在して,

$$\sup_{(x,z)\in(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d)\setminus\triangle}\int_{K^c}\frac{G(x,y)G(y,z)}{G(x,z)}\mu(dy)\le\epsilon$$

となり, $\mu(B) < \delta$ なる任意の可測集合 $B \subset K$ に対し

$$\sup_{(x,z)\in(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d)\setminus\triangle}\int_{B}\frac{G(x,y)G(y,z)}{G(x,z)}\mu(dy)\le\epsilon,\quad (\text{ただし}, \triangle=\{(x,x):x\in\mathbb{R}^d\})$$

となるとき, **クラス** $\mathcal{S}_\infty$ に属するという.

$\mu \in \mathcal{K}_\infty$ に対し**スペクトル関数** $C(\theta)$ を以下に定める:

$$C(\theta) = -\inf\left\{\mathcal{E}(u,u)-\theta\int u^2d\mu : u\in\mathcal{F}, \int u^2dx=1\right\}.$$

$$\mathcal{E}(h,h)=\inf\left\{\mathcal{E}(u,u):\int u^2d\mu=1\right\}$$

を満たす $h$ を **ground state** という.

**定理 2** ([2, Theorem 4.1 and Theorem 5.1])**.** $\mathbf{M}$ を特性関数 $\phi(|\xi|^2) = |\xi|^\alpha l(|\xi|^2)$ を持つ nearly stable process とする.

**$\mathbf{M}$ が再帰的な場合:** $\mu \in \mathcal{K}_\infty$ に対し $C(\theta)$ は $\mathbb{R}$ 上微分可能である.

**$\mathbf{M}$ が過渡的な場合:** $\mu \in \mathcal{S}_\infty$ に対し拡張 Dirichlet 空間 $\mathcal{F}_e$ から $L^2(\mu)$ への埋め込みがコンパクトであるとする. このとき, ground state $h$ は存在する．さらに $h$ について Harnack 不等式:

$$\exists C>0 \text{ such that } h(x)\le Ch(y)\quad \forall x,y\in\mathbb{R}^d,$$

が成立するとき, $h \notin L^2(\mathbb{R}^d)$ ならば $C(\theta)$ は $\mathbb{R}$ 上微分可能である.

定理 2 と Gärtner-Ellis の定理 ([1, Theorem 2.5.8]) により, 次の加法汎函数 $A_t^\mu$ の大偏差原理が成立する:

**定理 3** ([2, Theorem7.2])**.** $A_t^\mu$ を $\mu \in \mathcal{K}_\infty$ の正値加法汎函数で, 定理 2 を満たしているものとする．$I(\lambda)$ を $C(\theta)$ の Legendre 変換, すなわち $I(\lambda) = \sup_{\lambda\in\mathbb{R}}\{\theta\lambda - C(\theta)\}$ とする．このとき,

(I) $\mathbb{R}$ の開集合 $G$ に対し,

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\mathbb{P}_x\left(\frac{A_t^\mu}{t}\in G\right)\ge-\inf_{\lambda\in G}I(\lambda),$$

(II) $\mathbb{R}$ の閉集合 $F$ に対し,

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\mathbb{P}_x\left(\frac{A_t^\mu}{t}\in F\right)\le-\inf_{\lambda\in F}I(\lambda).$$

## 参考文献


[1] A. Dembo, O. Zeitouni, Large Deviations Techniques and Applications, vol. 38 of Applications of Mathematics (New York), 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1998.

[2] Y. Tawara and K. Tsuchida, Differentiability of spectral functions for nearly stable processes and large deviations, preprint, available at `http://www.nagaoka-ct.ac.jp/~tawara/pdfs/Taw-Tsu.pdf`

# Local Smoothness of the Densities of Solutions of SDEs with Singular Coefficients *

Gô Yûki
(Ritsumeikan University and Japan Science and Technology Agency)

Joint work with Arturo Kohatsu-Higa †and Masafumi Hayashi ‡

## 1 Introduction

Consider the following one dimensional SDE of the form

$$X_t = x_0 + \int_0^t \sigma(X_s)dB_s + \int_0^t b(X_s)ds \ (0 \leq t \leq T), \tag{1}$$

where $x_0 \in \mathbb{R}$ and $(B)_{t\geq 0}$ is a one dimensional Brownian motion.

Note that if we assume that the coefficients of a hypoelliptic SDE are bounded functions with bounded derivatives of any order, then the solution of (1) has a smooth density (see, for example, Nualart[4]). In recent years, one of the directions in this area is to develop tools to deal with the case of non-smooth coefficients.

Some related results have already been obtained for this problem, for example, Fournier and Printems [1] proved in the case that $\sigma$ is $\alpha$-Hölder continuous with $\alpha > \frac{1}{2}$ and $b$ is at most linear growth then the density of $X_t$ exists for all $t > 0$. In that case, they showed the existence of the density on the set $\{x \in \mathbb{R}; \sigma(x) \neq 0\}$. A careful analysis of their method shows that it is not amenable to obtain any further properties of the density (such as Hölder continuity).

For the multi-dimensional SDEs whose coefficients depends on time, Kusuoka [2] introduced some special space denoted by $V_h$ which is larger than Sobolev space and showed the relation between the space $V_h$ and absolute continuity. According to [2], one can show that the existence of the density of $X_t$ on the set $\{x \in \mathbb{R}; \sigma(x) \neq 0\}$ when the coefficients are bounded, $\sigma$ is twice continuously differentiable on $\{x \in \mathbb{R}; \sigma(x) \neq 0\}$ and $b$ is Lipschitz continuous on $\mathbb{R}$.

## 2 Main Result

**Definition 1.** *Let $y_0 \in \mathbb{R}$ and $\varepsilon > 0$. The law of $X$ has a density function $p_{y_0}$ on $B_\varepsilon(y_0) := \{y \in \mathbb{R}; |y - y_0| < \varepsilon\}$ if*

$$E[f(X)] = \int_{\mathbb{R}} f(y)p_{y_0}(y)dy$$

*for any continuous and bounded function $f$ whose support in $B_\varepsilon(y_0)$.*

Our main purpose is to prove the local smoothness of the density of the solution of (1) under the following assumptions.

*This research has been supported by grants of the Japanese government and it profited from fruitful discussions with Stefano de Marco.

†Ritsumeikan University and Japan Science and Technology Agency.

‡Ritsumeikan University and Japan Science and Technology Agency.

**Assumptions**

There exists some $y_0 \in \mathbb{R}$ and $\varepsilon > 0$ such that

$(A1)$: $\sigma$ and $b$ are bounded on the open ball $B_{6\varepsilon}(y_0)$. Moreover, $\inf_{x \in B_{6\varepsilon}(y_0)} |\sigma(x)| > \sigma_0 > 0$ for some constant $\sigma_0$.

$(A2)$ $\sigma \in C_b^\infty(B_{6\varepsilon}(y_0))$.

$(A3)$: $\sigma^{-1}b := \dfrac{b}{\sigma}$ is $\alpha$-Hölder continuous on $B_{6\varepsilon}(y_0)$, where $\alpha \in (0,1)$.

To prove the local smoothness of the density, following lemmas are useful.

**Lemma 1.** *Let $X$ be a $\mathbb{R}$-valued random variable and $\varphi$ be its characteristic function. Assume that the following inequality holds for some positive constant $C$ and $0 < \alpha < 1$.*

$$|\varphi(\theta)| \leq 1 \wedge (C|\theta|^{-(1+\alpha)}) \ (\forall \theta \in \mathbb{R}).$$

*Then the density function of the law of $X$ exists and is $\gamma$-Hölder continuous for any $0 < \gamma < \alpha$.*

**Lemma 2.** *Let $X$ be a $\mathbb{R}$-valued random variable, $\varepsilon > 0$ and $\phi_\varepsilon$ be an element of $C_b^\infty$ which satisfies that*

$$1_{B_\varepsilon(0)} \leq \phi_\varepsilon \leq 1_{B_{2\varepsilon}(0)}.$$

*Fix $y_0 \in \mathbb{R}$. Set $m_0 := E[\phi_\varepsilon(X - y_0)] > 0$ and consider $\mathcal{L}_{y_0}$ the probability measure on $\mathbb{R}$ such that*

$$\int_{\mathbb{R}} f(y)\mathcal{L}_{y_0}(dy) = \frac{1}{m_0} E[f(X)\phi_\varepsilon(X - y_0)],$$

*for all continuous and bounded function $f$. If $\mathcal{L}_{y_0}$ possesses a density $\tilde{p}_{y_0}$ then $p_{y_0} := m_0 \tilde{p}_{y_0}$ is the density function of $X$ on $B_\varepsilon(y_0)$.*

Thanks to Lemma 1 and Lemma 2, if for $t > 0$,

$$|E[e^{i\theta X_t}\phi_\varepsilon(X_t - y_0)]| \leq 1 \wedge (C|\theta|^{-(1+\gamma)}) \ (\forall |\theta| \geq 1) \tag{2}$$

holds for some positive constants $C$ and $\gamma$, then for any $\gamma' \in (0, \gamma)$ the density function of the $X_t$ exists and is $\gamma'$-Hölder continuous on $B_\varepsilon(y_0)$. Here, $\phi_\varepsilon$ is an element of $C_b^\infty(\mathbb{R})$ which satisfies the conditions of Lemma 2.

The main tool of our approach is Malliavin calculus which is well known as a method to prove the regularity of a solution of a SDE. However, in general the above solution $X$ is not differentiable in Malliavin sense. To solve this problem, we use Girsanov's theorem and localize $X$ by using some stopping times in order to deal with the local smoothness of the diffusion coefficient.

In our method, we consider a localization method for $\sigma$ together with Girsanov's theorem in order to treat the regularity of the density. The localization allows to change the process $X$ by a regularized version $\bar{X}$ for which Malliavin Calculus is applicable. The remaining problem is how to deal with the change of measure which contains the non-smooth function $b$. At this point, we use a similar argument as in [1], approximating the random variable $\bar{X}_t$ by a corresponding approximation. Then the change of measure is also approximated by its value at $t-\varepsilon$. This allows the use of the integration by parts formula. Finally, one needs to consider the approximation error which will finally lead to the following result.

**Theorem 1.** *Assume $(A1), (A2)$ and $(A3)$. Then for any initial value $x_0$, any $0 < t \leq T$ and any $0 < \gamma < \alpha$, the law of $X_t$ has a $\gamma$-Hölder continuous density on $B_\varepsilon(y_0)$.*

For examples of applications of the results obtained here, see [1] and [3].

## References

[1] N. Fournier and J. Printems, Absolute continuity for some one dimensional processes, Bernoulli, 16(2), 2010, 343-360.

[2] S. Kusuoka, Existence of densities of solutions of stochastic differential equations by Malliavin calculus, J. Functional Analysis 258 (2010), 758-784.

[3] S. D. Marco, On Probability Distributions of Diffusions and Financial Models with non-globally smooth coefficients. PhD. Thesis, http://cermics.enpc.fr/ de-marcs/home.html

[4] D. Nualart, The Malliavin calculus and Related Topics, Second edition, Springer Verlag, (2006)

# 飛躍関数付き Feynman-Kac 処罰問題

松浦將國*

平成 23 年 11 月 13 日†

正値連続加法的汎関数 (PCAF) に飛躍を考慮した項を加えた場合の Feynman-Kac 処罰問題を解決した．Feynman-Kac 処罰問題とは次のようなものであった．

$(\Omega, \mathcal{M}, \mathcal{M}_t, \mathbb{P}_x, \{X_t\}_{t\geq 0})_{x\in\mathbb{R}^n}$ を $\mathbb{R}^n$ 上の対称 $\alpha$ 安定過程 $(0<\alpha<2)$ とし，$\mu$ は加藤クラス $\mathcal{K}_\infty$ に属しているとする．ここに，

$$\mu \in \mathcal{K} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \lim_{\beta\to\infty} \|G_\beta \mu\|_\infty = 0, \quad \mu \in \mathcal{K}_\infty \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \mu \in \mathcal{K} \text{ and } \lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}} \sup_{B_r \subset B(0,R)} \|G_\beta(\mathbf{1}_{B_r \cup B(0,R)^c}\mu)\|_\infty = 0$$

$A_t^\mu$ を $\mu$ を Revuz 測度にもつ正値連続加法的汎関数 (PCAF)，$F$ をある正値対称有界な二変数関数で対角線上 0 になるものとし，次の加法的汎関数 (AF) を考える．

$$A_t^{\mu,F} := A_t^\mu + \sum_{0<u\leq t} F(X_{u-}, X_u) \tag{1}$$

このとき，(i) 任意の $S \in \mathcal{M}_s$ に対し，極限

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}_x[e^{A_t^{\mu,F}} \mathbf{1}_S]}{\mathbb{E}_x[e^{A_t^{\mu,F}}]}$$

は存在するか? また，(ii) その極限測度はあるマルチンゲールによる重み付けで明示的に表現されるか?

これに対し筆者は以下の通り解決した．まず，Doléans-Dade 方程式の解となる指数型マルチンゲール $M$ が次の通り与えられる．

$$M_t = e^{\sum_{u\leq t} F(X_{u-}, X_u) - c\int_0^t \int F_1(X_u, y)|X_u - y|^{-(n+\alpha)} dy du}$$

ここに，$F_1 := e^F - 1$ である．次に Revuz 対応の関係式から PCAF $t \mapsto \int_0^t \int F_1(X_u, y)|X_u - y|^{-(n+\alpha)} dy du$ に対応する Revuz 測度が

$$\mu_{F_1}(dx) := c\left\{\int F_1(x,y)|x-y|^{-(n+\alpha)} dy\right\} dx$$

と計算されることに注意すれば，Feynman-Kac 型乗法的汎関数は $e^{A_t^{\mu,F}} = M_t e^{A_t^{\mu+\mu_{F_1}}}$ と変換される．さらに，

$$d\mathbb{P}_x^M := M_s d\mathbb{P}_x \tag{2}$$

*東北大学大学院理学研究科数学専攻博士課程三年，メール：sa9d10@math.tohoku.ac.jp，ウェブサイト：http://www.math.tohoku.ac.jp/~sa9d10/index.html.

†研究集会「確率解析とその周辺」，平成 23 年 11 月 11 日 – 13 日，佐賀大学理工学部．

と重み付ける．この変換をした後の対称マルコフ過程を $Y$ とすると，それに連動するディリクレ形式 $\mathcal{E}^Y$ は

$$\mathcal{E}^Y(u,u) = \mathcal{E}^\alpha(u,u) + \frac{c}{2}\int \frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{\alpha+n}} F_1(x,y)dxdy = \frac{c}{2}\int \frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{\alpha+n}} e^{F(x,y)}dxdy$$

で与えられる．ここで，Lévy 核が同値であることから Bass and Levin (2002) より $X$ と $Y$ の推移確率が同値であることも分かる．よって，(2) の変換を通しても加藤クラスは不変である．つまり，$\mu+\mu_{F_1} \in \mathcal{K}_\infty$ である限り，飛躍関数が付いても Takeda (2010) に帰されることを示した．

$$\lambda_0 := \inf\left\{\mathcal{E}^Y(u,u)\ ;\ \int u^2 d(\mu+\mu_{F_1}) = 1\right\}$$

と定めると，(a) $\lambda_0 > 1$ のとき（劣臨界的の場合），$h(x) := \mathbb{E}_x^M[e^{A_\infty^{\mu+\mu_{F_1}}}] < \infty$ であるから，

$$L_s := \frac{e^{A_t^{\mu,F}} h(X_s)}{h(x)}$$

が求める重み付けマルチンゲールである．

$\lambda_0 < 1$［$\lambda_0 = 1$］のときはディリクレ空間 $\mathcal{E}^Y$［$\mathcal{E}^Y$ の拡大ディリクレ空間］から $L^2(\mu+\mu_{F_1})$ へのコンパクトな埋め込みが知られているから（Takeda and Tsuchida (2008)），調和関数 $h \in L^2(\mu+\mu_{F_1})$ が存在する．よって，(b) $\lambda_0 < 1$ のとき（優臨界的の場合）は正数 $\theta > 0$ が存在して

$$L_s := \frac{e^{-\theta t + A_t^{\mu,F}} h(X_s)}{h(x)}$$

が求める重み付けマルチンゲールとなる．(c) $\lambda_0 = 1$ のとき（臨界的の場合）は加藤クラスを次のように少し狭める．

$$\mu \in \mathcal{K}_s \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \mu \in \mathcal{K} \text{ and } \sup_x |x|^{n-\alpha} \int |x-y|^{\alpha-n}\mu(dy) < \infty$$

$\mu+\mu_{F_1} \in \mathcal{K}_s$ である限り，Chacon-Ornstein 型エルゴード定理を用いて重み付けマルチンゲールが次の通り得られる．

$$L_s := \frac{e^{A_t^{\mu,F}} h(X_s)}{h(x)}$$

本講演では以上の件を簡単に振り返る．

また，対称安定過程のグリーン関数は $G(x,y) = c|x-y|^{\alpha-n}$ であるから，$\mu_F \in \mathcal{K}_\infty$ は次のように読み替えられる．

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}} \sup_{B_r \subset B(0,R)} \sup_x \int_{B_r \cup B(0,R)^c} dy|x-y|^{\alpha-n} \int F(y,z)|y-z|^{-(n+\alpha)}dz = 0 \tag{3}$$

これを満たす関数の代表例は $F(x,y) = \mathbf{1}_{K_1}(x)\mathbf{1}_{K_2}(y) + \mathbf{1}_{K_2}(x)\mathbf{1}_{K_1}(y)$（$K_1$, $K_2$ は非交なコンパクト集合）である．しかし，球座標変換と Fubini の定理を用いた計算により次の関数も条件 (3) を満たすことが分かった．

$$F(x,y) = (1 \wedge |x-y|^p)\langle x\rangle^{-q}\langle y\rangle^{-q}$$

ここで $p > \alpha, q > n$ である．本講演ではこの例についても言及する．

# 区分的陪特性経路による相空間経路積分ー計算例を中心に

**熊ノ郷　直人（工学院大学）**

$T > 0$, $x \in \mathbf{R}^d$ とする．プランクパラメータ $0 < \hbar < 1$ をもつ Schrödinger 方程式の基本解の作用素を $U(T, 0)$ とする．

$$\left(i\hbar\partial_T - \frac{1}{\hbar}H(T, x, \frac{\hbar}{i}\partial_x)\right)U(T, 0) = 0\,, \quad U(0, 0) = I\,. \tag{1}$$

$x_0 \in \mathbf{R}^d$ に関する Fourier 変換と $\xi_0 \in \mathbf{R}^d$ に関する逆 Fourier 変換で，恒等作用素 $I$ は

$$Iv(x) = v(x) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^d \int_{\mathbf{R}^{2d}} e^{\frac{i}{\hbar}(x-x_0)\cdot\xi_0} v(x_0)dx_0 d\xi_0\,, \tag{2}$$

と書け，Hamilton 作用素 $H(T, x, \frac{\hbar}{i}\partial_x)$ は関数 $H(T, x, \xi_0)$ を用いて

$$H(T, x, \frac{\hbar}{i}\partial_x)v(x) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^d \int_{\mathbf{R}^{2d}} e^{\frac{i}{\hbar}(x-x_0)\cdot\xi_0} H(T, x, \xi_0)v(x_0)dx_0 d\xi_0\,, \tag{3}$$

と書ける．$T$ が小さいとき，

$$U(T, 0)v(x) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^d \int_{\mathbf{R}^{2d}} e^{\frac{i}{\hbar}(x-x_0)\cdot\xi_0} U(T, 0, x, \xi_0)v(x_0)dx_0 d\xi_0\,, \tag{4}$$

となる関数 $U(T, 0, x, \xi_0)$ を求めたい．Feynman の相空間経路積分を用いると形式的には

$$e^{\frac{i}{\hbar}(x-x_0)\cdot\xi_0} U(T, 0, x, \xi_0) = \int e^{\frac{i}{\hbar}\phi[q,p]}\mathcal{D}[q, p]\,, \tag{5}$$

と書ける．ここで $q : [0, T] \to \mathbf{R}^d$ は $q(0) = x_0$, $q(T) = x$ となる位置の経路，$p : [0, T) \to \mathbf{R}^d$ は $p(0) = \xi_0$ となる運動量の経路，$\phi[q, p]$ は相空間経路 $(q, p)$ に対する作用

$$\phi[q, p] = \int_{[0,T)} p(t)\cdot dq(t) - \int_{[0,T)} H(t, q(t), p(t))dt\,, \tag{6}$$

であり，相空間経路積分 $\int \sim \mathcal{D}[q, p]$ は“ すべての経路 $(q, p)$ に関する和 ”である．

しかし，数学的には測度 $\mathcal{D}[q, p]$ は存在しない．物理的にも位置 $q(t)$ と運動量 $p(t)$ を同時刻 $t$ に測定できない不確定性原理があり，相空間経路にはいろいろな解釈がある．

この講演では計算上の理由から，区分的陪特性経路を定義し，一般的な汎関数 $F[q, p]$ を振幅とする相空間経路積分

$$\int e^{\frac{i}{\hbar}\phi[q,p]}F[q, p]\mathcal{D}[q, p] \tag{7}$$

が存在する汎関数 $F[q, p]$ のクラス $\mathcal{F}$ を与える．

特に区分的陪特性経路による基本解 $U(T, 0, x, \xi_0)$ の計算例を中心に解説する．

**仮定 1 (Hamilton 関数)** 実数値関数 $H(t,x,\xi):\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d\to\mathbf{R}$ は任意の多重指数 $\alpha,\ \beta$ に対し，$\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta H(t,x,\xi)$ は連続で，正の定数 $C_{\alpha,\beta}$ が存在し
$|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta H(t,x,\xi)|\le C_{\alpha,\beta}(1+|x|+|\xi|)^{\max(2-|\alpha+\beta|,0)}$.

**例 1 (仮定 1 を満たす Hamilton 作用素)**

$$
\begin{aligned}
H(t,x,\frac{\hbar}{i}\partial_x) &= \sum_{j,k=1}^{d}(a_{j,k}(t)\frac{\hbar}{i}\partial_{x_j}\frac{\hbar}{i}\partial_{x_k}+b_{j,k}(t)x_j\frac{\hbar}{i}\partial_{x_k}+c_{j,k}(t)x_jx_k)\\
&+ \sum_{j=1}^{d}(a_j(t)\frac{\hbar}{i}\partial_{x_j}+b_j(t)x_j)+c(t,x)\,.
\end{aligned}
$$

ただし $a_{j,k}(t),\ b_{j,k}(t),\ c_{j,k}(t),\ a_j(t),\ b_j(t)$ と $\partial_x^\alpha c(t,x)$ は有界で連続な実数値関数とする．

**例 2 (汎関数 $F[q,p]\in\mathcal{F}$ の例)** $0\le t\le T,\ 0\le T'\le T''\le T$ とする．

(1) $|\partial_x^\alpha B(t,x)|\le C_\alpha(1+|x|)^m$（運動量 $p$ によらない）のとき，$F[q]=B(t,q(t))\in\mathcal{F}$. 特に $F[q,p]\equiv 1\in\mathcal{F}$.

(2) $|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta B(t,x,\xi)|\le C_{\alpha,\beta}(1+|x|+|\xi|)^m$ のとき，$F[q,p]=\displaystyle\int_{[T',T'')}B(t,q(t),p(t))dt\in\mathcal{F}$.

(3) $|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta B(t,x,\xi)|\le C_{\alpha,\beta}$ のとき，$F[q,p]=e^{\int_{[T',T'')}B(t,q(t),p(t))dt}\in\mathcal{F}$.

**定理 1 ($\mathcal{F}$ の性質)** $F[q,p],\ G[q,p]\in\mathcal{F}$ ならば，$F[q,p]+G[q,p],\ F[q,p]G[q,p]\in\mathcal{F}$.

汎関数 $F[q,p]$ のクラス $\mathcal{F}$ の定義はあとで述べる．ここで定義を述べなくても，定理 1 を例 2 に適用すれば，相空間経路積分可能な汎関数 $F[q,p]\in\mathcal{F}$ の例を創ることができる．

さて，区分的陪特性経路を用いた時間分割近似法による経路積分の定義を述べよう：

$\Delta_{T,0}=(T_{J+1},T_J,\dots,T_1,T_0)$ を区間 $[0,T]$ の任意の分割

$$
\Delta_{T,0}:T=T_{J+1}>T_J>\cdots>T_1>T_0=0\,, \tag{8}
$$

とする．$t_j=T_j-T_{j-1}$ とおき，分割の幅 $|\Delta_{T,0}|=\max_{1\le j\le J+1}t_j$ が小さいとする．

$x_{J+1}=x$ とおき，$x_j\in\mathbf{R}^d$，$\xi_j\in\mathbf{R}^d$，$j=1,2,\dots,J$ とする．

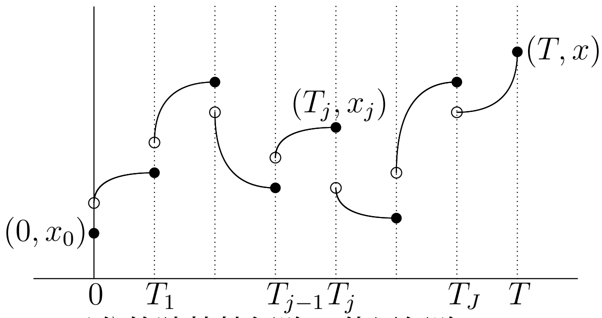
陪特性経路 $\bar q_{T_j,T_{j-1}}=\bar q_{T_j,T_{j-1}}(t,x_j,\xi_{j-1})$ と $\bar p_{T_j,T_{j-1}}=\bar p_{T_j,T_{j-1}}(t,x_j,\xi_{j-1})$ を正準方程式

$$
\begin{aligned}
&\partial_t\bar q_{T_j,T_{j-1}}(t)=(\partial_\xi H)(t,\bar q_{T_j,T_{j-1}},\bar p_{T_j,T_{j-1}})\,,\\
&\partial_t\bar p_{T_j,T_{j-1}}(t)=-(\partial_x H)(t,\bar q_{T_j,T_{j-1}},\bar p_{T_j,T_{j-1}})\,,\quad T_{j-1}\le t\le T_j\,,
\end{aligned} \tag{9}
$$

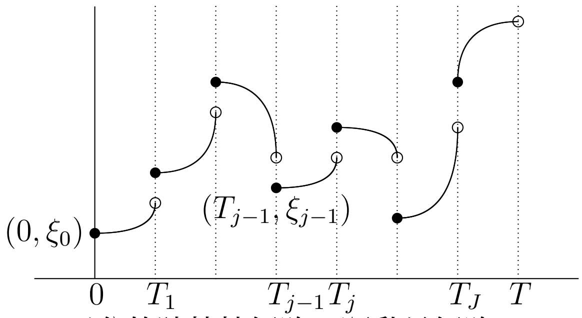
と 境界条件 $\bar q_{T_j,T_{j-1}}(T_j)=x_j$，$\bar p_{T_j,T_{j-1}}(T_{j-1})=\xi_{j-1}$ で定義する（図参照）.

区分的陪特性経路 $q_{\Delta_{T,0}}=q_{\Delta_{T,0}}(t,x_{J+1},\xi_J,x_J,\dots,\xi_1,x_1,\xi_0,x_0)$ と $p_{\Delta_{T,0}}=p_{\Delta_{T,0}}(t,x_{J+1},\xi_J,x_J,\dots,\xi_1,x_1,\xi_0)$ を

$$
\begin{aligned}
q_{\Delta_{T,0}}(t) &= \bar q_{T_j,T_{j-1}}(t,x_j,\xi_{j-1}),\quad T_{j-1}<t\le T_j,\quad q_{\Delta_{T,0}}(0)=x_0,\\
p_{\Delta_{T,0}}(t) &= \bar p_{T_j,T_{j-1}}(t,x_j,\xi_{j-1}),\quad T_{j-1}\le t<T_j,\quad j=1,2,\dots,J,J+1
\end{aligned} \tag{10}
$$



区分的陪特性経路の位置経路 $q_{\Delta_{T,0}}$



区分的陪特性経路の運動量経路 $p_{\Delta_{T,0}}$

で定義する（図参照）．このとき汎関数 $\phi[q_{\Delta_{T,0}},p_{\Delta_{T,0}}]$, $F[q_{\Delta_{T,0}},p_{\Delta_{T,0}}]$ は関数となる．

$$\phi[q_{\Delta_{T,0}},p_{\Delta_{T,0}}]=\phi_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1},\xi_J,x_J,\ldots,\xi_1,x_1,\xi_0,x_0)\,, \tag{11}$$

$$F[q_{\Delta_{T,0}},p_{\Delta_{T,0}}]=F_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1},\xi_J,x_J,\ldots,\xi_1,x_1,\xi_0,x_0)\,. \tag{12}$$

**定理 2 (相空間経路積分の存在)** $T$ が小さいとき，任意の汎関数 $F[q,p]\in\mathcal{F}$ に対して，

$$\begin{aligned}&\int e^{\frac{i}{\hbar}\phi[q,p]}F[q,p]\mathcal{D}[q,p]\\&\equiv\lim_{|\Delta_{T,0}|\to 0}\left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{dJ}\int_{\mathbf{R}^{2dJ}}e^{\frac{i}{\hbar}\phi[q_{\Delta_{T,0}},p_{\Delta_{T,0}}]}F[q_{\Delta_{T,0}},p_{\Delta_{T,0}}]\prod_{j=1}^{J}dx_jd\xi_j\end{aligned} \tag{13}$$

は $(x,\xi_0,x_0)$ に関して $\mathbf{R}^{3d}$ 上広義一様収束する．つまり相空間経路積分は存在する．

**例 3 (基本解 $U(T,0,x,\xi_0)$ の計算例)** $d=1$, $F[q,p]\equiv 1$ とする．

(1) $H(t,x,\xi)=\xi^2/2$ のとき，(13) より

$$e^{\frac{i}{\hbar}(x-x_0)\cdot\xi_0}U(T,0,x,\xi_0)=\int e^{\frac{i}{\hbar}\phi[q,p]}\mathcal{D}[q,p]=\exp\frac{i}{\hbar}\Big((x-x_0)\cdot\xi_0-\frac{T}{2}\xi_0^2\Big)\,.$$

と計算できて， (4) の作用素 $U(T,0)$ は以下の Schrödinger 方程式を満たす.

$$(i\hbar\partial_T+\hbar^2\triangle/2)U(T,0)=0\,,\quad U(0,0)=I\,.$$

(2) $H(t,x,\xi)=x^2/2+\xi^2/2$ のとき，(13) より

$$e^{\frac{i}{\hbar}(x-x_0)\cdot\xi_0}U(T,0,x,\xi_0)=\frac{1}{(\cos T)^{1/2}}\exp\frac{i}{\hbar}\Big(-x_0\cdot\xi_0+\frac{2x\cdot\xi_0-(x^2+\xi_0^2)\sin T}{2\cos T}\Big)\,.$$

と計算できて，(4) の作用素 $U(T,0)$ は以下の Schrödinger 方程式を満たす.

$$(i\hbar\partial_T+\hbar^2\triangle/2-x^2/2)U(T,0)=0\,,\quad U(0,0)=I\,.$$

(3) $H(t,x,\xi)=x^2/2+x\cdot\xi+\xi^2/2$ のとき，(13) より

$$e^{\frac{i}{\hbar}(x-x_0)\cdot\xi_0}U(T,0,x,\xi_0)=\left(\frac{e^T}{1+T}\right)^{1/2}\exp\frac{i}{\hbar}\Big(-x_0\cdot\xi_0+\frac{2x\cdot\xi_0-T(x^2+\xi_0^2)}{2(1+T)}\Big).$$

と計算できて，(4) の作用素 $U(T,0)$ は以下の Schrödinger 方程式を満たす.

$$(i\hbar\partial_T+\hbar^2\triangle/2-x\frac{\hbar}{i}\partial_x-x^2/2)U(T,0)=0\,,\quad U(0,0)=I\,.$$

(4) $H(t,x,\xi)=x^2/2-\xi^2/2$ のとき，(13) より

$$e^{\frac{i}{\hbar}(x-x_0)\cdot\xi_0}U(T,0,x,\xi_0)=\frac{1}{(\cosh T)^{1/2}}\exp\frac{i}{\hbar}\Big(-x_0\cdot\xi_0+\frac{2x\cdot\xi_0-(x^2-\xi_0^2)\sinh T}{2\cosh T}\Big).$$

と計算できて，(4) の作用素 $U(T,0)$ は以下の方程式を満たす.

$$(i\hbar\partial_T-\hbar^2\triangle/2-x^2/2)U(T,0)=0\,,\quad U(0,0)=I\,.$$

(5) 例外として複素数値関数 $H(t,x,\xi)=-ix^2/2-i\xi^2/2$ としても, (13) より

$$e^{\frac{i}{\hbar}(x-x_0)\cdot\xi_0}U(T,0,x,\xi_0)=\frac{1}{(\cosh T)^{1/2}}\exp\frac{i}{\hbar}\Big(-x_0\cdot\xi_0+\frac{2x\cdot\xi_0+i(x^2+\xi_0^2)\sinh T}{2\cosh T}\Big).$$

と計算できて，(4) の作用素 $U(T,0)$ は以下の熱方程式を満たす

$$(\hbar\partial_T-\hbar^2\triangle/2+x^2/2)U(T,0)=0\,,\quad U(0,0)=I\,.$$

**定義 1 (汎関数のクラス $\mathcal{F}$)** $F[q_{\Delta_{T,0}},p_{\Delta_{T,0}}]$ が仮定 2 を満たすとき $F[q,p]\in\mathcal{F}$ とする.

**仮定 2** $m$ は非負整数，$u_j$, $j=1,2,\ldots,J,J+1$ は分割 $\Delta_{T,0}$ に依存する非負のパラメータで $\sum_{j=1}^{J+1}u_j=U<\infty$ を満たすとする．任意の非負整数 $M$ に対し，正の定数 $A_M$, $X_M$ が存在し，任意の分割 $\Delta_{T,0}$ と， $|\alpha_j|$, $|\beta_{j-1}|\le M$ となる任意の多重指数 $\alpha_j$, $\beta_{j-1}$, $j=1,2,\ldots,J,J+1$ と，$1\le k\le J$ となる任意の整数 $k$ に対し，

$$\begin{aligned}&|(\prod_{j=1}^{J+1}\partial_{x_j}^{\alpha_j}\partial_{\xi_{j-1}}^{\beta_{j-1}})F_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1},\xi_J,\ldots,x_1,\xi_0,x_0)|\\&\le A_M(X_M)^{J+1}(\prod_{j=1}^{J+1}(t_j)^{\min(|\beta_{j-1}|,1)})(1+\sum_{j=1}^{J+1}(|x_j|+|\xi_{j-1}|)+|x_0|)^m\,,\end{aligned}\tag{14}$$

$$\begin{aligned}&|(\prod_{j=1}^{J+1}\partial_{x_j}^{\alpha_j}\partial_{\xi_{j-1}}^{\beta_{j-1}})\partial_{x_k}F_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1},\xi_J,\ldots,x_1,\xi_0,x_0)|\\&\le A_M(X_M)^{J+1}u_k(\prod_{j\neq k}(t_j)^{\min(|\beta_{j-1}|,1)})(1+\sum_{j=1}^{J+1}(|x_j|+|\xi_{j-1}|)+|x_0|)^m\,.\end{aligned}\tag{15}$$

時間が許せば，積分との順序交換，摂動展開，Hamilton 型準古典近似について述べる.

[1] N. Kumano-go, D. Fujiwara, Phase space Feynman path integrals via piecewise bicharacteristic paths and their semiclassical approximations, Bull. Sci. math. **132** (2008), 313–357.