Spitzer 等式と確率擬過程

2010/12/20, 西岡 國雄[*1]

1 Feynman のアイデアと Gel'fand-Yaglom の提案

I. Feynman [1948] は Schrödinger 方程式

$$\partial_t u(t,x) = i\,\partial_x{}^2\ u(t,x) + V(x)\,u(t,x), \quad u(0,x) = u_0(x) \tag{1}$$

の解を構成するため, 次の原理を提案した.

Step 1. 適当な path 空間 Ω を設定する. N を自然数として, path $w \in \Omega$ を

$$w^{(N)}(t) \equiv w(\frac{k}{N}) \qquad \text{if} \quad t^{(N)} \equiv \frac{k}{N} \le t < \frac{k+1}{N} \tag{2}$$

と階段関数で近似する. (つまり Gauss の記号 $[\,\cdot\,]$ を使うと, $t^{(N)} \equiv [t\,N]/N$.)

Step 2. potential 項のない Schrödinger 方程式 $\partial_t u = i\,\partial_x{}^2 u$ の基本解 $q(t,x)$ を遷移確率密度とする Markov chain $\{X^{(N)}(t, w^{(N)})\}$ を次で定義する:

$$\begin{cases} \Omega \text{ 上の筒型集合} \quad \Gamma \equiv \{w \in \Omega : X^{(N)}(t_1, w^{(N)}) \in A_1, \cdots, X^{(N)}(t_k, w^{(N)}) \in A_k\} \text{ にたいし} \\[2ex] \mathbf{P}_x^{(N)}\big[\Gamma\big] \equiv \displaystyle\int_{A_1} dy_1 \cdots \int_{A_k} dy_k\ q(t_1^{(N)}, x - y_1)\ q(t_2^{(N)} - t_1^{(N)}, y_1 - y_2) \times \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \times \cdots \times q(t_k^{(N)} - t_{k-1}^{(N)}, y_{k-1} - y_k). \end{cases} \tag{3}$$

Step 3. すると 適当な条件の下で, (1) の解 u は次で与えられる:

$$u^{(N)}(t,x) = \mathbf{E}_x^{(N)}\Big[\exp\{\sum_{k=0}^{[t\,N]} V(w(\frac{k}{N}))\,\frac{1}{N}\}\ u_0\big(w(t^{(N)})\big)\Big], \quad \lim_{N\to\infty} u^{(N)}(t,x) = u(t,x). \tag{4}$$

II. Feynman のアイデアが提出された翌年に, Kac [1949] はそれを熱方程式 $\partial_t u = \dfrac{1}{2}\,\partial_x{}^2 u$ に適用した. この場合, (3) は Wiener 測度に収束し, 'Feynman の原理' はすべて厳密に成立する.

次に, この Kac の結果を参考にして, 'Feynman の原理' 自身を数学的に正当化しようという提案が Gel'fand-Yaglom [1960] によってなされた. 彼らの提案は, "(1) で i の代わりに $\rho \equiv \varepsilon + i$ を使って, Wiener 測度の類似物を構成し, 最後に $\varepsilon \to 0$ として (1) の解 (4) を得る" というものだった.

ところが, この提案の基礎に誤りがあり, Gel'fand-Yaglom の提案自体は無意味なものとなった. これを指摘したのは, Cameron [1962] や Daletsky [1962] であるが, 要するに, (3) で $N \to \infty$ とするとき, $\mathbf{P}_x^{(N)}[\cdot]$ は有界変動ではなくなる. そのため Kolmogorov の拡張定理が成立しないので, (3) を加算加法的に拡張した測度の存在は証明できず, (4) の存在が証明出来ない.

2 高階熱型方程式に対応する確率擬過程

I. Cameron などの指摘により, 発展方程式の基本解 $q(t,x)$ から path 空間上の測度 (=確率擬過程) を構成すると, それは一般に有界変動でないことが認識された. そのため, 確率擬過程の研究は, '振動積分の打ち消し' が生じて, (3) の符号付き測度 $\mathbf{P}_x^{(N)}$ による積分 $\mathbf{E}_x^{(N)}$ の極限

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{E}_x^{(N)}\big[F(X^{(N)})\big] \tag{5}$$

[*1] 〒 192-0393, 八王子市東中野 742-1 中央大学商学部, E-mail: nishioka@tamacc.chuo-u.ac.jp

が存在するような path 空間上の関数 F にたいし, その値を計算することに向かった．とくに 高階熱型方程式

$$\partial_t u(t,x) = \begin{cases} -(-1)^{m/2}\partial_x{}^m\ u(t,x) & \text{if } m \text{ is even,} \\ \\ \partial_x{}^m\ u(t,x) & \text{if } m \text{ is odd} \end{cases} \tag{6}$$

に対応する確率擬過程は BM と類似性が期待され, 多くの研究がなされた．中でも $m=4$ の場合, (6) は弾性論や水力学, 燃焼問題などで多く出現し, それに対応する擬過程 (SPP_4 と略記する) の性質に関して, 組織的な研究が行われた: path の連続性/Feynman-Kac の公式/arc-sine law (Krylov [2]), Girsanov の公式 (Nishioka [1987]), first hitting time (Hochberg [1], [3]) など.

II. 以上の研究に於いて, '振動積分の打ち消し' を利用するため, path 空間上の '符号付き測度' $\mathbf{P}_x\big[\ \cdot\ \big]$ による積分を定義する一般的な方法が提案された [3].

Step 4. $\Omega \equiv \mathcal{D}[0,\infty)$ を右連続で左極限を持つ関数の全体を path 空間 とする．$w \in \Omega$ にたいし, その階段関数近似 $w^{(N)}$ を (2) とし, (3) で Markov 連鎖 $\{X^{(N)}(t, w^{(N)})\}$ を定義する．この $\{X^{(N)}(t, w^{(N)})\}$ の推移確率は (6) の基本解である.

Step5. Ω 上の関数 F_k が $\mathscr{F}_k$ 可測で有界なら, $\mathbf{E}_x^{(N)}\big[F_k(X^{(N)})\big]$ は存在する．そこで Ω 上の関数 F にたいし, $\mathscr{F}_k$ 可測で有界な関数列 $\{F_k, k=1,2,\cdots\}$ があり

$$\begin{cases} F_k(X^{(N)}) \to F(X^{(N)}) \quad \text{as } k\to\infty, \quad \text{かつ} \\ \\ \big\{\mathbf{E}_x^{(N)}\big[F_k(X^{(N)})\big], k=1,2,\cdots\big\} \quad \text{は Cauchy 列} \end{cases} \tag{7}$$

であるとき, 次のようにおく.

$$\mathbf{E}_x^{(N)}\big[F(X^{(N)})\big] \equiv \lim_{k\to\infty} \mathbf{E}_x^{(N)}\big[F_k(X^{(N)})\big].$$

Step 6. (7) を満たす Ω 上の関数 F が, 更に,

$$\Big\{\mathbf{E}_x^{(N)}\big[F(X^{(N)})\big], N=1,2,\cdots\Big\} \quad \text{は Cauchy 列} \tag{8}$$

であるとき, '(6) に対応する確率擬過程による F の平均' を次で定義する:

$$\mathbf{E}_x\big[F(X)\big] \equiv \lim_{N\to\infty} \mathbf{E}_x^{(N)}\big[F(X^{(N)})\big].$$

3 Spitzer 等式の適用

前節 II の手順中で難しいのは, *Step 5, 6* である．(3) で定義される Markov 連鎖 $\{X^{(N)}(t, w^{(N)})\}$ の推移確率密度は既に '符号付き測度' なので, 通常の確率過程論の結果は適用できない．しかし, Spitzer [4] は

(9) 'Markov 連鎖 $\{X(n)\}$ の 最大値 $\max_{k\le n} X(k)$ と $X(n)$ の同時分布' の Laplace 変換,

(10) '正値の個数 $Q(n) \equiv \#\{k \le n : X(k) > 0\}$ の分布' の母関数

の計算方法を「組み合わせ論」から導いた．そのため これらの Spitzer 等式は符号付き推移確率をもつ $\{X^{(N)}(t, w^{(N)})\}$ にも適用可能である．実際, (9) を利用すると $m=4$ である (6) に対応する確率擬過程 SPP_4 の first hitting time と hitting place の同時分布が計算できる:

命題 1 ([3])**.** τ_0 を SPP_4, $\{X(t)\}$, の点 0 への first hitting time とする.

$$\mathbf{P}_x\big[\tau_0 \in dt, X(\tau_0) \in da\big] = K(t,x)\,\delta_0(a)\ da - J(t,x)\,\delta_0'(a)\ da.$$

ここで $\delta_0(a)$ は 0 に単位質量をもつ デルタ関数, $\delta_0'(a)$ はその (超関数の意味での) 微分．K および J は明示出来る関数である． $\diamond$

注意 2. (i)　$\delta_0(a)$ は '単一の符号の電荷' を担なう粒子で, 物理学で**単極子 (monpole)** と呼ばれる. 一方, $-\delta_0'(a)$ は '絶対値が同じで, 反対の符号の電荷' を同時に担なう粒子で**双極子 (dipole)** と呼ばれる. 微少な磁石は典型的な双極子である.

(ii)　つまり SPP_4 は, BM などの通常の確率過程とは異なり, monopole と dipole の 2 種類の粒子から成る.

(iii)　近年, Lachal [2000, 2003, 2006] は m が偶数の (6) に対応する 確率擬過程が $m/2$ 種類の粒子 (monopole, dipole, $\cdots$, $m/2$-tuple pole) から成ることを示した. また Shimoyma [5] は $m=3$ の (6) に対応する確率擬過程も monopole と dipole の 2 種類の粒子から成ることを示した. ただし, この dipole は一方向にのみ移動し, それまでの dipole と異なる挙動をとる.　$\diamond$

4　確率擬過程の滞在時間

次に Spitzer 等式 (10) を利用すると, 確率擬過程の滞在時間の分布が §2 II に従って計算できる.

(6) に対応する確率擬過程を SPP_m とおく. 本報告の主結果は以下の通り:

Beta 関数の法則？

定理 3. (i)　m が偶数のとき, SPP_m, $\{X(t)\}$, の正の部分での滞在時間の分布[a]:

$$\mathbf{P}_0\Big[\int_0^1 ds\ I_{(0,\infty)}\big(X(s)\big) < t\Big] = \frac{1}{\pi}\int_0^t dy\ \frac{1}{\sqrt{y\,(1-y)}}.$$

(ii)　$m=3$ のとき, SPP_3, $\{X(t)\}$, の正の部分での滞在時間の分布:

$$\mathbf{P}_0\Big[\int_0^1 ds\ I_{(0,\infty)}\big(X(s)\big) < t\Big] = \frac{\sin(\pi/3)}{\pi}\int_0^t dy\ \frac{1}{y^{1/3}\,(1-y)^{2/3}}.$$

(iii)　$m=5$ のとき, SPP_5, $\{X(t)\}$, の正の部分での滞在時間の分布:

$$\mathbf{P}_0\Big[\int_0^1 ds\ I_{(0,\infty)}\big(X(s)\big) < t\Big] = \frac{\sin(3\pi/5)}{\pi}\int_0^t dy\ \frac{1}{y^{3/5}\,(1-y)^{2/5}}.\quad \diamond$$

[a] 対称な確率擬過程となるので BM と同じ arc-sine law が成立する. $m=4$ の場合は, Krylov [2], 一般の偶数 m にたいしては Lachal [2003] が既に報告している.

文献

[1] Hochberg, K. J., A signed measure on path space related to Wiener measure, Ann. Prob., 6 (1978), 433–458.

[2] Krylov, Y. Yu., Some properties of the distribution corresponding to the equation $\partial u/\partial t = (-1)^{q+1}\partial^{2q}u/\partial x^{2q}$, Soviet Math., Dokl., 1 (1960), 760–763.

[3] Nishioka, K., The first hitting time and place of half-line by a biharmonic pseudo process, Japan. J. Math., 23 (1997), 235–280.

[4] Spitzer, F., A combinatorial lemma and its application to probability theory, Trans. Amer. Math. Soc., 82 (1958), 323–339.

[5] Shimoyama, Y., On behaviors of the stochastic pseudo processes governed by third-order heat type equations, submitted.