Uniform Estimate for Distributions of the Sum of i.i.d Random Variables with Fat Tail: Threshold case

中原健二（東大数理, D3)

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上に i.i.d 確率変数列 $X_n, n = 1, 2, \ldots,$ を考える。また X_1 の分布を μ とし, $F : \mathbb{R} \to [0,1]$, $\bar{F} : \mathbb{R} \to [0,1]$ をそれぞれ $F(x) = \mu((-\infty, x])$, $\bar{F}(x) = \mu((x, \infty))$, $x \in \mathbb{R}$ と定義する。独立同分布の和の分布に関しては多くの研究がなされている。最も有名なものは中心極限定理

$$\sup_{s \in \mathbb{R}} |P(\sum_{k-1}^{n} X_k > sn^{1/2}) - \Phi_0(s)| \to 0, \qquad n \to \infty \tag{1}$$

である。ここで $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \exp(-\frac{y^2}{2}) dy, (x \in \mathbb{R})$ とおいた。

s が大きいところでは $P(\sum_{k-1}^{n} X_k > sn^{1/2})$,$\Phi_0(s)$ は両方とも値が小さいから, 式 (1) または一般に差の形の評価はあまり良い評価ではない。本講演では比の形の一様評価についての研究を紹介する。次の条件を仮定する。

(A1) $\bar{F}(x)$ はある $\alpha \geq 2$ に対して指数 $-\alpha$ の regularly varying 関数とする。つまり $L(x) = x^\alpha \bar{F}(x)$, $x \geq 1$, とおくと $L(x) > 0$ $(x \geq 1)$ かつ任意の $a > 0$ に対して

$$\frac{L(ax)}{L(x)} \to 1 \ , \ x \to \infty.$$

が成り立つとする。

(A2) ある $\delta_0 \in (0,1)$ が存在して $\int_{-\infty}^{0} |x|^{\alpha+\delta_0} \mu(dx) < \infty$ となる。また $\int_{\mathbb{R}} x^2 \mu(dx) = 1$, $\int_{\mathbb{R}} x \mu(dx) = 0$ を満たすとする。

比の形の一様評価について有名なものは次の Nagaev [2] による結果である。

定理 1. (Nagaev) $\alpha > 2$ に対して (A1), (A2) を仮定する. このとき

$$\sup_{s \in [1,\infty)} |\frac{P(\sum_{k=1}^{n} X_k > n^{1/2} s)}{\Phi_0(s) + n\bar{F}(n^{1/2} s)} - 1| \to 0, \qquad n \to \infty. \tag{2}$$

が成り立つ。

結果 (A1),(A2) に加えて次を仮定する。

(A3) μ は密度関数 $\rho : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ をもち, さらに ρ は右連続関数で有界な全変動をもつとする。

記号 $\Phi_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, k = 1, 2$ を $\Phi_k(x) = -\frac{d}{dx} \Phi_{k-1}(x)$, と定義する。

また $v_n = \int_{-\infty}^{n^{1/2}} x^2\mu(dx)$ $(n \geq 1)$,

$$H(n,s) = \Phi_0(s) \quad + \quad n\int_{-\infty}^{s} \bar{F}((s-x)v_n^{1/2}n^{1/2})\Phi_1(x)dx$$
$$\qquad - \quad \left(v_n^{-1/2}n^{1/2}\Phi_1(s)\int_0^{\infty} x\mu(dx) + v_n^{-1}\frac{\Phi_2(s)}{2}\int_0^{n^{1/2}} x^2\mu(dx)\right)$$

とする。

定理 2. $\alpha = 2$ に対して (A1), (A2), (A3) を仮定する。このとき任意の $\delta \in (0,1)$ に対してある $C > 0$ が存在して

$$\sup_{s\in[1,\infty)} \left|\frac{P(\sum_{k=1}^n X_k > n^{1/2}s)}{H(n, v_n^{-1/2}s)} - 1\right| \leq CL(n^{1/2})^{1-\delta}, \qquad n \geq 1 \tag{3}$$

が成り立つ。特に

$$\sup_{s\in[1,\infty)} \left|\frac{P(\sum_{k=1}^n X_k > n^{1/2}s)}{\Phi_0(v_n^{-1/2}s) + n\bar{F}(n^{1/2}s)} - 1\right| \to 0, \qquad n \to \infty. \tag{4}$$

注 1 仮定 (A1), (A2) のもと $L(n^{1/2}) \to 0$ $(n \to \infty)$ が成り立つ。

注 2 $\alpha > 2$ のときは同様の結果が Fushiya-Kusuoka[1] で示されている。

注 3 $\alpha = 2$ のときは一般に式 (2) は成り立たない。

注 4 $\alpha < 2$ のときは適当なスケーリングのもと和の極限分布は指数 α の安定分布になることが知られている。

注 5 定理 2 では分散が有限と仮定しているが, 分散が無限大の場合にも同様の結果が成り立つ。

References

[1] Fushiya, H., and S. Kusuoka, Uniform Estimate for Distributions of the Sum of i.i.d Random Variables with Fat Tail , J. Math. Sci. Univ. Tokyo 17 (2010), 79-121.

[2] Nagaev, S. V., Large deviations of sums of independent random variables, Ann. Probab. 7 (1979), 745-789.

[3] K. Nakahara, Uniform Estimate for Distributions of the Sum of i.i.d Random Variables with Fat Tail: Threshold case, preprint. Univ. of Tokyo.