Bohr-Jessen の極限定理の極限分布の $\sigma \searrow \frac{1}{2}$ のときの挙動

村山太郎 (金沢大学大学院 自然科学研究科)

本講演では, Bohr-Jessen の極限定理に現れる極限分布の $\sigma \searrow \frac{1}{2}$ のときの挙動について話したいと思う. Bohr-Jessen の極限定理を述べる前に, それに現れる, もしくは関連のある記号について簡単に説明しよう:

- $\mathbb{B}$ を実数値概周期関数全体, $\mathbb{R}^{\mathbb{B}} = \{(x_f)_{f\in\mathbb{B}}; x_f \in \mathbb{R}\ (f \in \mathbb{B})\}$ とし, $\mathbb{R}^{\mathbb{B}}$ 上に次のような確率測度 $\mathbf{P}$ を導入する (cf. [2]): $T > 0$ に対して, P_T を $[-T, T]$ 上の一様分布とする. $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{B}$ に対して, 連続写像
$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \big(f_1(t), \ldots, f_n(t)\big) \in \mathbb{R}^n$$
による P_T の像測度を $P_T^{(f_1,\cdots f_n)}$ と表す. このとき
$$^{\exists}\mathbf{P}^{(f_1,\ldots,f_n)} : \big(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\big) \text{ 上の確率測度 s.t. } P_T^{(f_1,\ldots,f_n)} \Rightarrow \mathbf{P}^{(f_1,\ldots,f_n)} \quad \text{as } T \to \infty.$$
$\mathbf{P}^{(f_1,\ldots,f_n)}$ $(f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{B},\ n \geq 1)$ は両立条件をみたす. 従って, Kolmogorov の拡張定理より
$$^{\exists}\mathbf{P} : \big(\mathbb{R}^{\mathbb{B}}, \mathcal{B}_{\mathrm{K}}(\mathbb{R}^{\mathbb{B}})\big) \text{ 上の確率測度}$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} ^{\forall}n \in \mathbb{N}, ^{\forall}f_1, \ldots, ^{\forall}f_n \in \mathbb{B} \text{ with } f_i \neq f_j \text{ if } i \neq j \text{ に対して} \\ \mathbf{P} \circ \pi^{-1}_{(f_1,\ldots,f_n)} = \mathbf{P}^{(f_1,\ldots,f_n)}. \end{cases}$$
(このとき $P_T^{(f_1,\ldots,f_n)} \Rightarrow \mathbf{P} \circ \pi^{-1}_{(f_1,\ldots,f_n)}$ as $T \to \infty$ となることに注意.) ただし $\pi_{(f_1,\ldots,f_n)} : \mathbb{R}^{\mathbb{B}} \to \mathbb{R}^n$ は $\pi_{(f_1,\ldots,f_n)}((x_f)_{f\in\mathbb{B}}) := (x_{f_1}, \ldots, x_{f_n})$, $\mathcal{B}_{\mathrm{K}}(\mathbb{R}^{\mathbb{B}}) := \sigma(\pi_f; f \in \mathbb{B})$ とする.
- 各 $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ に対し, $e(\lambda) : \mathbb{R}^{\mathbb{B}} \to \mathbb{C}$ を
$$e(\lambda)((x_f)_{f\in\mathbb{B}}) := x_{\cos\lambda\cdot} + \sqrt{-1}\, x_{\sin\lambda\cdot}$$
と定義する. ただし, $\cos\lambda\cdot$, $\sin\lambda\cdot$ はそれぞれ周期関数 $t \mapsto \cos\lambda t$, $t \mapsto \sin\lambda t$ を表す. このとき, $s \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\, s > \frac{1}{2}$ に対して, $\mathbf{P}$ の下で無限級数
$$X(s) := \sum_{p:\text{素数}} -\log\Big(1 - \frac{e(-\log p)}{p^s}\Big)$$
は概収束する. さらに $\{X(s)\}_{s;\mathrm{Re}\, s > \frac{1}{2}}$ は連続変形をもつ. これを $\{\widetilde{X}(s)\}_{s;\mathrm{Re}\, s > \frac{1}{2}}$ とする.
- ζ を Riemann の zeta 関数とし, $\zeta(s) \neq 0$ $(s \in G)$ となるように適当な単連結領域 G を構成して, G 上で $\log\zeta(s)$ を定義する.
- $T > 0$ に対して, U_T は $[-T, T]$ 上の一様分布に従う確率変数とする.

以上の準備の下で, Bohr-Jessen の極限定理を述べると

Fact 1 (cf. [1])**.** $T > 0, \sigma > \frac{1}{2}$ に対して
$$\widetilde{X}_T(\sigma) := \mathbf{1}_G(\sigma + \sqrt{-1}U_T) \log\zeta(\sigma + \sqrt{-1}U_T)$$
とおく. このとき
$$\widetilde{X}_T(\sigma) \text{ の分布} \Rightarrow \widetilde{X}(\sigma) \text{ の分布} \quad \text{as } T \to \infty.$$

我々の関心事は, 上記の極限分布, 即ち $\widetilde{X}(\sigma)$ の分布の挙動である. $\widetilde{X}(\sigma)$ は複素確率変数であるが, 扱いやすくするために, $\mathbb{R}^2$ 値の確率変数とみなし, その分布を p_σ, 即ち, $\sigma > \frac{1}{2}$ に対して

$$p_\sigma(dxdy) = \mathbf{P}\Big(\Big(\mathrm{Re}\,\widetilde{X}(\sigma), \mathrm{Im}\,\widetilde{X}(\sigma)\Big) \in dxdy\Big), \quad x, y \in \mathbb{R} \tag{1}$$

とおく.

Fact 2 (cf. [3])**.** $p_\sigma(dxdy)$ は $\mathbb{R}^2$ の Lebesgue 測度に関して絶対連続で, その密度関数 $p_\sigma(\cdot, *)$ は C^∞ となる. そして

$$p_\sigma(\cdot, *) \rightrightarrows 0 \quad \text{as } \sigma \searrow \tfrac{1}{2}$$

が成り立つ.

これは, $\sigma \searrow \frac{1}{2}$ のとき $p_\sigma(dxdy)$ 自体は弱収束しないことを示唆する. しかし, 適当なスケーリングをすれば弱収束する:

Claim 1. $\sigma > \frac{1}{2}$ に対して

$$C_\sigma := \frac{1}{2}\sum_p \frac{1}{p^{2\sigma}} \Big(\sim \frac{1}{2}\log\frac{1}{2\sigma - 1} \quad \text{as } \sigma \searrow \tfrac{1}{2}\Big)$$

とおく[注1]. このとき $^\forall(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$\lim_{\sigma \searrow \frac{1}{2}} \widehat{p_\sigma}\Big(\frac{\xi}{\sqrt{C_\sigma}}, \frac{\eta}{\sqrt{C_\sigma}}\Big) = e^{-\frac{\xi^2 + \eta^2}{2}}.$$

ただし $\widehat{p_\sigma}$ は $p_\sigma(dxdy)$ の特性関数である. この収束は言い換えると

$$\frac{\widetilde{X}(\sigma)}{\sqrt{C_\sigma}} \text{ の分布} \Rightarrow \mathbb{C} \text{ の標準正規分布} \quad \text{as } \sigma \searrow \tfrac{1}{2}.$$

$\frac{\widetilde{X}(\sigma)}{\sqrt{C_\sigma}}$ を $\mathbb{R}^2$ 値の確率変数とみなしたとき, その分布は $\mathbb{R}^2$ の Lebesgue 測度に関して絶対連続で, その確率密度関数は $C_\sigma p_\sigma(\sqrt{C_\sigma}x, \sqrt{C_\sigma}y)$, 即ち

$$\mathbf{P}\Bigg(\Bigg(\mathrm{Re}\,\frac{\widetilde{X}(\sigma)}{\sqrt{C_\sigma}}, \mathrm{Im}\,\frac{\widetilde{X}(\sigma)}{\sqrt{C_\sigma}}\Bigg) \in dxdy\Bigg) = C_\sigma p_\sigma(\sqrt{C_\sigma}x, \sqrt{C_\sigma}y)dxdy$$

となる. 従って, Claim 1 の主張は

$$C_\sigma p_\sigma(\sqrt{C_\sigma}x, \sqrt{C_\sigma}y)dxdy \Rightarrow \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy \quad \text{as } \sigma \searrow \tfrac{1}{2}$$

と書くことができる.

この収束は確率密度関数レベルでも成り立つ:

定理 1. (i) $^\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$C_\sigma p_\sigma(\sqrt{C_\sigma}x, \sqrt{C_\sigma}y) \to \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \quad \text{as} \quad \sigma \searrow \tfrac{1}{2}.$$

(ii) この収束は L^1 でも成り立つ. 即ち

$$\lim_{\sigma \searrow \frac{1}{2}} \iint_{\mathbb{R}^2} \Big| C_\sigma p_\sigma(\sqrt{C_\sigma}x, \sqrt{C_\sigma}y) - \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \Big| dxdy = 0.$$

[注1] $\sum_p$ は 素数 p についての和である. なお, $p^{2\sigma}$ は素数 p の 2σ 乗, しかし p_σ は (1) で定義される確率分布である. 上ツキと下ツキで別物になるので注意が要!

系 1.

$$\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} p_\sigma(x,y) \sim \frac{1}{2\pi C_\sigma} \quad \text{as } \sigma \searrow \tfrac{1}{2}.$$

これは, Fact 2 で述べた収束の速さを確定している.

定理 1 (i) より $C_\sigma p_\sigma(\sqrt{C_\sigma}x, \sqrt{C_\sigma}y) - \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \to 0$ as $\sigma \searrow \frac{1}{2}$ であるが, この収束の速さは次のようになる:

定理 2.

$$\lim_{\sigma\searrow\frac{1}{2}} \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \Bigg| C_\sigma\Big(C_\sigma p_\sigma(\sqrt{C_\sigma}x, \sqrt{C_\sigma}y) - \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\Big) + \frac{1}{4\pi}\sum_p \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}\frac{1}{p^k}\Big(1 - \frac{x^2+y^2}{2}\Big)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \Bigg| = 0.$$

定理 2 を言い換えると

$$\begin{aligned} &C_\sigma p_\sigma(\sqrt{C_\sigma}x, \sqrt{C_\sigma}y) \\ &= \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} - \frac{1}{4\pi C_\sigma}\Big(\sum_p \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}\frac{1}{p^k}\Big)\Big(1 - \frac{x^2+y^2}{2}\Big)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \\ &\quad + o\Big(\frac{1}{C_\sigma}\Big) \quad \text{as } \sigma \searrow \tfrac{1}{2} \text{ uniformly in } (x,y)\in\mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

となるが, 右辺はさらに次のように展開できる:

定理 3.

$$\begin{aligned} &C_\sigma p_\sigma(\sqrt{C_\sigma}x, \sqrt{C_\sigma}y) \\ &= \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} - \frac{1}{C_\sigma}\frac{1}{4\pi}\Big(\sum_p \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}\frac{1}{p^k}\Big)\Big(1 - \frac{x^2+y^2}{2}\Big)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \\ &\quad - \frac{1}{C_\sigma^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{4\pi}\Big(\sum_p \sum_{k_1,k_2=1}^{\infty} \frac{1}{k_1k_2(k_1+k_2)}\frac{1}{p^{k_1+k_2}}\Big)x\Big(1 - \frac{x^2+y^2}{4}\Big)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \\ &\quad + O\Big(\frac{1}{C_\sigma^2}\Big) \quad \text{as } \sigma \searrow \tfrac{1}{2} \text{ uniformly in } (x,y)\in\mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

定理 2, 3 より, $C_\sigma p_\sigma(\sqrt{C_\sigma}x, \sqrt{C_\sigma}y)$ は

$$\begin{aligned} &C_\sigma p_\sigma(\sqrt{C_\sigma}x, \sqrt{C_\sigma}y) \\ &\cong \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{\sqrt{C_\sigma}}\Big)^k \varphi_k(x,y) \quad \text{as } \sigma \searrow \tfrac{1}{2} \text{ uniformly in } (x,y)\in\mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

と漸近展開できるのではないかと予想される. そこで次の目標としては, 一般項 $\varphi_k(x,y)$ を求めることにより, 上の漸近展開が可能であることを示すことである.

参考文献

[1] H. Bohr and B. Jessen, Über die Wertverteilung der Riemannschen Zetafunktion, Erste Mitteilung, *Acta Math.*, **54** (1930), 1-35; Zweite Mitteilung, *ibid.*, **58** (1932), 1-55.

[2] K. Fukuyama (福山克司), 概周期函数系の相対測度の下に於ける, いくつかの極限定理について, 修士論文, 京都大学大学院理学研究科 (1987).

[3] B. Jessen and A. Wintner, Distribution functions and the Riemann zeta function, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **38** (1935), 48-88.

[4] 松本耕二, リーマンのゼータ関数, 朝倉書店, 2007.

[5] 高信敏, 確率論者のための Bohr-Jessen の極限定理とその極限分布, 第 2.3 版, ノート, 2010 年 10 月 19 日.