確率論シンポジウム（2010.12.22 京大数理解析研）

確率解析から生まれたある数列空間

本田あおい，岡崎悦明（九工大情報工学部），佐藤坦（九大名誉教授）

1．　新しい数列空間

1.1.　定義.

$f(\neq 0) \in \mathbf{L}_p = \mathbf{L}_p(\mathbb{R}, dx),\ 1 \leq p < +\infty$ に対して数列空間 $\Lambda_p(f)$ を

$$\Psi_p(\boldsymbol{a}; f) \Leftarrow\!\!= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x - a_k) - f(x)|^p \, dx,\ \boldsymbol{a} = \{a_k\} \in \mathbb{R}^{\infty},$$
$$\Lambda_p(f) \Leftarrow\!\!= \{\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^{\infty} \,|\, \Psi_p(\boldsymbol{a}; f) < +\infty\}$$

で定義する．また "$I_p(f) < +\infty$" とは $f = f(x)$ が $\mathbb{R}$ 上で絶対連続かつ

$$I_p(f) \Leftarrow\!\!= \int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|^p dx < +\infty$$

を意味するものとする．さらに $\Lambda_p(f)$ 上の距離を次で定義する．

$$d_p^f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \Leftarrow\!\!= \Psi_p(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}; f)^{\frac{1}{p}}, \quad \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \Lambda_p(f).$$

1.2.　基本的な性質.

Theorem 1.1.[4]　$f(\neq 0) \in \mathbf{L}_p,\ 1 \leq p < +\infty$ とする．

1.　$\Lambda_p(f) \subset \ell_p$.
2.　$I_p(f) < +\infty \quad \Rightarrow \quad \Lambda_p(f) = \ell_p$.
3.　特に $1 < p < +\infty$ の場合 $\Lambda_p(f) = \ell_p \quad \Leftrightarrow \quad I_p(f) < +\infty$.

Theorem 1.2.[5]　$f, g(\neq 0) \in \mathbf{L}_p,\ 1 \leq p < +\infty$ とする．

$$I_p(f - g) < +\infty \quad \Rightarrow \quad \Lambda_p(f) = \Lambda_p(g).$$

Theorem 1.3.　$f(\neq 0) \in \mathbf{L}_p,\ 1 \leq p < +\infty$ とき $(\Lambda_p(f), d_p^f)$ は完備可分位相加群である．

1.3.　Example.

$f(x) \Leftarrow\!\!= \sqrt{x} e^{-x} \mathbf{I}_{[0,+\infty)}(x)$ とする．このとき

$$1 \leq p < 2 \Rightarrow \Lambda_p(f) = \ell_p, \qquad p > 2 \Rightarrow \Lambda_p(f) = \ell_{1+\frac{p}{2}},$$
$$p = 2 \ \Rightarrow\ \Lambda_2(f) = \ell_{2-} \Leftarrow\!\!= \left\{ \boldsymbol{a} = \{a_k\} \,\middle|\, \sum_k a_k^2 (1 + |\log|a_k||) < +\infty \right\}.$$

$\Lambda_p(f)$ は加群ではあるが，線形空間とは限らない [2]．本講演の目的は非負値非減少関数に対する古典的な doubling condition を一般の非負値関数に拡張することによって $\Lambda_2(f)$ の線形性を特徴付けることにある．しかしその前にまずこの新しい数列空間の定義が確率解析から動機付けられたものであることを紹介する．

2. なぜこのような空間を考えたか？$\cdots\cdots$確率解析．

2.1. Wiener 空間. μ を $W \Leftarrow \{w|[0,1] \to I\!R, \text{連続}, w(0)=0\}$ 上の Wiener 測度とする．μ は Cameron-Martin 空間

$$\mathcal{H}_\mu \Leftarrow \left\{ w \in W \middle| \exists \dot{w} \in \mathbf{L}_2[0,1] \textit{ such that } w(t) = \int_0^t \dot{w}(s)ds \right\}$$

に関して準不変 [1] かつエルゴード的 [10] である．それではこのような性質は何故成り立つのであろうか？

2.2. 無限直積測度の準不変性. $dm(x) = \rho(x)dx$ を $\rho(x) > 0,\ a.e.(dx)$ なる $I\!R$ 上の確率測度，$\boldsymbol{m} \Leftarrow m^\infty$ を $I\!R^\infty$ 上の無限直積測度，$\boldsymbol{a} = \{a_k\} \in I\!R^\infty$ に対して $\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{a}}(A) \Leftarrow \boldsymbol{m}(A - \boldsymbol{a})$ と定義する．

Theorem 2.1.[7] $\boldsymbol{m} \sim \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{a}}$（互いに絶対連続）または $\boldsymbol{m} \perp \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{a}}$（特異）のいずれかであり

$$\boldsymbol{m} \sim \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{a}} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_k \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \sqrt{\rho(x-a_k)} - \sqrt{\rho(x)} \right|^2 dx < +\infty.$$

Theorem 2.2.[9] $\boldsymbol{m} \sim \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{a}} \ \Rightarrow\ \boldsymbol{a} \in \ell_2$.

$$\boldsymbol{m} \sim \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{a}} \ for\ \forall \boldsymbol{a} \in \ell_2 \quad \Leftrightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho'(x)^2}{\rho(x)} dx < +\infty.$$

上の結果を私たちの立場から書きなおすと $\Lambda_2(\sqrt{\rho}) \subset \ell_2$, また $\Lambda_2(\sqrt{\rho}) = \ell_2 \ \Leftrightarrow\ I_2(\sqrt{\rho}) < +\infty$. となる．

ちなみに $\gamma(x) \Leftarrow (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ の場合には $I_2(\gamma) < +\infty$ であり，この事実の反映が Cameron-Martin 空間の準不変性，エルゴード性である．[8]

3. Doubling condition と $\Lambda_2(f)$ の線形性．[4]

3.1. $\Lambda_2(f)$ の線形性. $p = 2$ の場合には Fourier 解析を適用することによって詳しい解析をすることが出来る．実際 $f \in \mathbf{L}_2$ の Fourier 変換を $\hat{f}$ とすると $\boldsymbol{a} = \{a_k\}$ に対して

$$\Psi_2(\boldsymbol{a}; f) = 4 \int_0^{+\infty} (1 - \cos a_k \alpha) \left| \hat{f}(\alpha) \right|^2 d\alpha.$$

Theorem 3.1. $f(\neq 0) \in \mathbf{L}_2$ とするとき $\Lambda_2(f)$ が線形空間となるための必要十分条件は，任意の $\boldsymbol{a} = \{a_k\} \in \Lambda_2(f)$ に対して次の 2 条件の成り立つこと．

$$\text{(S.1)} \quad \sum_k a_k^2 \int_0^{\frac{1}{|a_k|}} \alpha^2 \left| \hat{f}(\alpha) \right|^2 d\alpha < +\infty,$$

$$\text{(S.2)} \quad \sum_k \int_{\frac{1}{|a_k|}}^{+\infty} \left| \hat{f}(\alpha) \right|^2 d\alpha < +\infty.$$

ここで $f(\neq 0) \in \mathbf{L}_2$ に対して関数 $\varphi_f(x) \Leftarrow \int_0^x \alpha^2 \left| \hat{f}(\alpha) \right|^2 d\alpha$ により次の空間を定義する．

$$\Lambda_2^\varphi(f) \Leftarrow \left\{ \{a_k\} \middle| \sum_k a_k^2 \left[1 + \varphi_f\left(\frac{1}{|a_k|} \right) \right] < +\infty \right\}$$

Theorem 3.2. $f(\neq 0) \in \mathbf{L}_2$ とするとき $\Lambda_2(f) \subset \Lambda_2^{\varphi}(f)$.

3.2. Doubling condition. $[0,+\infty)$ 上の関数 $\varphi(x)$ が *doubling condition* を満たすとは，ある $h \in I\!R$ に対して

$$D(h;\varphi) \equiv \limsup_{x\to+\infty,\varphi(x)>0} \sup_{T\geq 1} \frac{\varphi(Tx)}{\varphi(x)T^h} < +\infty$$

となること．また $H(\varphi) \equiv \inf\{h \in I\!R \,|\, D(h;\varphi) < +\infty\}$ を φ の *doubling dimension* と言う．

Theorem 3.3. $f(\neq 0) \in \mathbf{L}_2$ がある $R \geq 0$ に対して $|\hat{f}(\alpha)| > 0, \alpha \geq R$, であり，かつ $|\hat{f}|$ が doubling condition を満たせば $\Lambda_2(f)$ は線形空間である．

Theorem 3.4. $f(\neq 0) \in \mathbf{L}_2$ について $H(\varphi_f) < 2$ であれば $\Lambda_2(f) = \Lambda_2^{\varphi}(f)$ であり $\Lambda_2(f)$ は線形空間である．

参考文献

[1] R. Cameron and W.T. Martin : Transformations of Wiener integrals under translation. *Ann. Math.* **45** (1944) 386-396.

[2] S.D. Chatterji and V. Mandrekar : Quasi-invariance of measures under translation. *Math. Z.* **154** (1977) 19-21.

[3] L. Gross : Abstract Wiener space. *Proc. Fifth Berkley Sympo. on Math. Stat. and Probab.* **II, Part I** (1965) 31-42.

[4] A. Honda, Y. Okazaki and H. Sato : An $\mathbf{L}_p$-function determines ℓ_p. *Proc. Japan Acad.* **84** Ser. A (2008) 39-41.

[5] A. Honda, Y. Okazaki and H. Sato : Doubling condition and linearity of the sequence space $\Lambda_p(f)$. *preprint.*

[6] K. Ito and M. Nisio : On the convergence of the sums of independent Banach space valued random variables. *Osaka J. Math.* **5** (1968) 35-48.

[7] S. Kakutani : On equivalence of infinite product measures. *Ann. Math.* **49** (1948) 214-224.

[8] 佐藤坦 ： ウィーナー空間. *Rokko Lect. in Math.* **6** (1999) 神戸大学理学部数学教室.

[9] L. A. Shepp : Distinguishing a sequence of random variables from a translate of itself. *Ann. Math. Stat.* **36** (1965) 1107-1112.

[10] Y. Umemura : Measures on infinite dimensional vector spaces. *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **1** (1965) 1-47