非コンパクト多様体上の確率過程の法則の弱収束について

Giacomo De Leva
熊本大学大学院　自然科学研究科

はじめに

点付き測度付き Gromov-Hausdorff 収束によって多様体 M_n の数列が収束すると, 特定の十分条件を仮定したら, 極限空間上の標準的 Dirichlet 形式に対応する確率過程の法則は, 測度の弱収束という意味で, ϵ_n-近似写像で M_n のディリクレ形式に対応する離散時間確率過程を写像して得られる確率過程の法則に近似される事を報告したい. この結果を証明するために, Mosco 収束の定理の拡張を示している [KS03] で使われた枠組みを用いた. これはコンパクト多様体の場合の [O01] の結果を拡張する.

定数 $\kappa \in \mathbb{R}$ とし, $m \in \mathbb{N}$ とし, $V_0 > 0$ とする. 次の条件を満たす (M, d, x, μ) の族を $\mathcal{M}(m, \kappa, V_0)$ で表す. ここで, M が m-次元の完備リーマン多様体で, d が M のリーマン計量 g から誘導される距離で, $x \in M$ で, 以下の条件を満たす $\mu := w\,\mathrm{vol}$ が M のリーマン測度 vol に関して密度関数 w を持つ測度である.

(1) $\mu(B(x, 1)) \geq V_0$;

(2) (M, g) の Levi-Civita 接続を ∇_g で, (M, g) の Ricci 曲率を Ric_g で表す,

$$\mathrm{Ric}_g - \nabla_g \log w \otimes \nabla_g \log w - \nabla_g \nabla_g \log w \geq (m-1)\kappa g.$$

$(E, \mathscr{E})$ を可測空間とする. $(E_\partial, \mathscr{E}_\partial)$ で次の可測空間を表する. E_∂ を E と一点集合 $\{\partial\}$ の和集合とし, $\mathscr{E}_\partial$ を σ-代数 $\mathscr{E} \cup \{B \cup \{\partial\} : B \in \mathscr{E}\}$ とする. 点 $\partial \in E_\partial$ は E_∂ のセメタリー点と呼ばれる. μ を E 上の確率測度とするとき, μ は自然な方法で $\mathscr{E}_\partial$ 上の確率測度に拡張される. E を局所コンパクト可分距離空間とし, $\mathscr{E}$ を Borel σ-代数とするとき, E_∂ 上の測度の弱収束について考えるために, Borel σ 代数が $\mathscr{E}_\partial$ である E_∂ 上の位相を定義するのが必要である. E_∂ 上に次の二つの位相を考える.

位相 $\mathscr{T}_1$: $\{\partial\}$ を孤立点とし, E の E_∂ での相対位相が与えられた E の位相と一致する.

位相 $\mathscr{T}_2$: E が非コンパクトな場合で, ∂ を無限遠点にする一点コンパクト化である.

(M, d) を可分距離空間とする. M の Borel σ-代数を $\mathscr{B}(M)$ で表し, すべての $t \geq 0$ に対して右連続かつすべての $t > 0$ に対して左極限を持つ $f : [0, +\infty) \longrightarrow M$ の族を $D_M([0, +\infty))$ で表す. Skorohod の距離で $D_M([0, +\infty))$ は距離空間になる. 次の命題はよく知られている.

命題 (Doob)**.** $(X_t)_{t\geq 0}$ を確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ 上の確率過程とする. $(X_t)_{t\geq 0}$ の状態空間 (M, d) が完備可分距離空間と仮定し, $(X_t)_{t\geq 0}$ の道は $D_M := D_M([0, +\infty))$ に属すると仮定する. このとき, $(X_t)_{t\geq 0}$ の法則の外測度を $(D_M, \mathscr{B}(D_M))$ 上に制限した $\mathbb{P}$ は次の条件を満たす $(D_M, \mathscr{B}(D_M))$ 上の唯一の確率測度である： $\tilde{X}_t(\omega) := \omega(t)$ と定義したとき, $(D_M, \mathscr{B}(D_M), \mathbb{P})$ 上の確率過程 $(\tilde{X}_t)_{t\geq 0}$ は $(X_t)_{t\geq 0}$ に等価である.

点付き測度付き Gromov-Hausdorff 収束

定義. $(M,\, d_M,\, x)$ と $(N,\, d_N,\, y)$ を点付き距離空間とし, 点 x を含む U と点 y を含む V をそれぞれ M と N の部分集合とし, $\epsilon > 0$ を正の定数とする. U 上で定義される関数 $f : U \longrightarrow Y$ が次の条件を満たすとき, U と V の間の ϵ-近似点付き写像と呼ぶ. $f(x) = y$ で, $V \subset B(f(U),\, \epsilon)$ で, 任意の $x_1,\, x_2 \in U$ に対して

$$|d_N(f(x_1),\, f(x_2)) - d_M(x_1,\, x_2)| < \epsilon.$$

定義. $(M,\, d,\, x,\, \mu)$ を局所コンパクト, 点付き測度距離空間とし, $((M_\alpha,\, d_\alpha,\, x_\alpha,\, \mu_\alpha))_{\alpha\in\mathcal{A}}$ を局所コンパクト, 点付き測度距離空間のネットとする. 任意の $r > 0$ に対して, 以下の条件を満たす正の定数のネット $(\epsilon_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ と $B(x_\alpha,\, r)$ と $B(x,\, r - \epsilon_\alpha)$ の間の $\mathscr{B}(M_\alpha)$-$\mathscr{B}(M)$ 可測 ϵ_α-近似点付き写像 $f_\alpha : B(x_\alpha,\, r) \longrightarrow M$ のネット $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ が存在するとき, $((M_\alpha,\, d_\alpha,\, x_\alpha,\, \mu_\alpha))_{\alpha\in\mathcal{A}}$ は $(M,\, d,\, x,\, \mu)$ へ点付き測度付き Gromov-Hausdorff 収束すると言う. $(\epsilon_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ は 0 へ収束し, 任意の $u \in C_0(B(x,\, r))$ に対して

$$\lim_{\alpha} \int_{B(x_\alpha,\, r)} u \circ f_\alpha \, d\mu_\alpha = \int_{B(x,\, r)} u \, d\mu.$$

Hilbert 空間の収束

論文 [KS03] で紹介された定義を復習する.

定義. C を実数可分 Hilbert 空間の密な部分ベクトル空間とし, $(H_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ を実数可分 Hilbert 空間のネットとし, $(\Phi_\alpha : C \longrightarrow H_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ を線形写像 $\Phi_\alpha : C \longrightarrow H_\alpha$ のネットとする. 任意の $v \in C$ に対して

$$\lim_{\alpha} ||\Phi_\alpha v||_{H_\alpha} = ||v||_H$$

が成り立つとき, $(H_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ は $(\Phi_\alpha : C \longrightarrow H_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ に関して H へ収束すると言う.

定義. $(H_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ が $(\Phi_\alpha : C \longrightarrow H_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ 関して H へ収束すると仮定する. $(u_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ を $u_\alpha \in H_\alpha$ を満たす有向集合 $\mathcal{A}$ のネットとし, $u \in H$ とする.

$$\lim_{\beta} \left(\limsup_{\alpha} ||\Phi_\alpha v_\beta - u_\alpha||_{H_\alpha} \right) = 0$$

を満たし, u へ収束する C のネット $(v_\beta)_{\beta\in\mathcal{B}}$ が存在するとき, $(u_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ は $(\Phi_\alpha : C \longrightarrow H_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ に関して u へ収束すると言う.

定義. $(H_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ が $(\Phi_\alpha : C \longrightarrow H_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ に関して H へ収束すると仮定する. $u_\alpha \in H_\alpha$ を満たす有向集合 $\mathcal{A}$ のネット $(u_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ とし, $u \in H$ とする. $v_\alpha \in H_\alpha$ を満たし, $v \in H$ へ収束する任意のネット $(v_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ に対して

$$\lim_{\alpha} (u_\alpha,\, v_\alpha)_{H_\alpha} = (u,\, v)_H$$

が成り立つとき, $(u_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ は $(\Phi_\alpha : C \longrightarrow H_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ に関して u へ弱収束すると言う.

主定理

定理. $((M_n,\, d_n,\, x_n,\, \mu_n))_{n\in\mathbb{N}}$ をプロパー可分点付き測度距離空間 $(M,\, d,\, x,\, \mu)$ へ点付き測度付き *Gromov-Hausdorff* 収束する $\mathcal{M}(m,\, \kappa,\, V_0)$ の元の列とし, $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を正の非減少発散数列とする. このとき, 0 へ収束する正数列 $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ と, $B(x_n,\, r_n)$ と $B(x,\, r_n - \epsilon_n)$ の間の $\mathscr{B}(M_\alpha)$-$\mathscr{B}(M)$ 可測 ϵ_α-近似点付き写像 $f_n : B(x_n,\, r_n) \longrightarrow M$ の列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が存在する. 次の条件を仮定する.

(1) 次の条件を満たす定数 V_1 が存在する．任意の $y \in B(x_n,\, r_n)$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して，$\mu_n(B(y,\, 1)) \geq V_1$．

(2) 次の条件を満たす二つの定数 $m_1 > m+2$ と $\epsilon > 0$ が存在する．任意の $T > 0$ 以下の条件を満たす定数 $V_2(T)$ が存在する．任意の $0 < t \leq T$ と $y \in B(x_n,\, r_n)$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\int_{B(x_n,\, r_n)} \left(\frac{d_n(y,\, z)^2 \wedge 1}{t} \right)^{m_1/2} e^{-d_n(y,\, z)^2/((4+\epsilon)t)} \mu_n(dz) \leq V_2(T).$$

(3) 任意の正数 t と δ と R に対して，次の条件を満たす二つの定数 $r > 0$ と $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在する．任意の $n \geq n_0$ に対して，$||\psi_{ntr}||_{L^2(B(x_n,\, R),\, \mu_n)} < \delta$ が成り立つ．ここで，

$$\psi_{ntr} : y \in B(x_n,\, r_n) \mapsto \int_{B(x_n,\, r_n) \setminus B(x_n,\, r)} e^{-d_n(y,\, z)^2/t} \mu_n(dz).$$

(4) $\nu_n,\, n \in \mathbb{N},$ と ν はそれぞれ $B(x_n,\, r_n)$ 上と $(M,\, d)$ 上で，μ_n と μ に関して絶対連続の確率測度であり，それぞれ対応する密度関数を $\varphi_n \in L^2(B(x_n,\, r_n),\, \mu_n)$ と $\varphi \in L^2(M,\, \mu)$ と仮定する．$(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $(\Phi_n : C_0(M) \longrightarrow L^2(B(x_n,,\, r_n),\, \mu_n))_{n\in\mathbb{N}}$ に関して φ へ弱収束する．ここで，$\Phi_n(u) := u \circ f_n$．

定数 $\tau \in (0,\, 2m_1/(m_1 - m)]$ を固定する．$(X_{n,t})_{t\geq 0}$ で $L^2(B(x_n,\, r_n),\, \mu_n)$ 上の *Dirichlet* 境界条件の標準的 *Dirichlet* 形式に対応する *Markov* 過程を表し，$(X_t)_{t\geq 0}$ で $L^2(M,\, \mu)$ 上の標準的 *Dirichlet* 形式に対応する *Markov* 過程を表し，$\mathbb{P}^{\nu_n}$ で ν_n に関して $(X_{n,t})_{t\geq 0}$ の法則を表す．$X_{n,\phi_n(t)} \in B(x_n,\, r_n)$ と，$Y_{n,t}(\omega) := f_n(X_{n,\phi_n(t)}(\omega))$ を定義し，そうでないとき，$Y_{n,t}(\omega)$ を M_∂ のセメタリー点と定義する．ここで，$\phi_n(t) := [t/\epsilon_n^\tau]\epsilon_n^\tau$ で，$[s]$ は s 以下の最大の整数で，$\epsilon_n^\tau := (\epsilon_n)^\tau$ である．このとき，M_∂ が位相 $\mathscr{T}_1$ 又は位相 $\mathscr{T}_2$ を持つと，$\tilde{\mathbb{P}}^{\nu_n}$ で $(\mathbb{P}^{\nu_n},\, (Y_{n,t})_{t\geq 0})$ の法則の外測度の $D_{M_\partial}([0,\, +\infty))$ 上への制限を表したとき，$(\tilde{\mathbb{P}}^{\nu_n})_{n\in\mathbb{N}}$ が $(X_t)_{t\geq 0}$ の ν に関する法則 $\mathbb{P}^\nu$ の外測度の $D_{M_\partial}([0,\, +\infty))$ 上への制限へ収束するとき，かつそのときに限り任意の $t \geq 0$ に対して列 $(\mathbb{P}^{\nu_n}(Y_{n,t} \in M))_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathbb{P}^\nu(X_t \in M)$ へ収束する．

注意． 有界連続密度関数 $\widetilde{\varphi} \in L^2(M,\, \mu) \cap L^1(M,\, \mu)$ とすると，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して次の条件を満たす密度関数 $\widetilde{\varphi}_n \in L^2(B(x_n,\, r_n),\, \mu_n) \cap L^1(B(x_n,\, r_n),\, \mu_n)$ が存在する． 数列 $(\widetilde{\varphi}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が $(\Phi_n : C_0(M) \longrightarrow L^2(B(x_n,,\, r_n),\, \mu_n))_{n\in\mathbb{N}}$ に関して $\widetilde{\varphi}$ へ収束する．

注意． 任意の $t \geq 0$ と数列 $(\mathbb{P}^{\nu_n}(Y_{n,t} \in M))_{n\in\mathbb{N}}$ が $\mathbb{P}^\nu(X_t \in M)$ へ収束するための十分条件は次である： 任意の正数 t と δ に対して，次の不等式を満たす $r > 0$ と $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在する．

$$\sup_{n\geq n_0} \int_{B(x_n,\, r_n)\setminus B(x_n,\, r)} \int_{B(x_n,\, r_n)} \varphi_n(y) e^{-d_n(y,\, z)^2/t} \mu_n(dz)\mu_n(dy) < \delta.$$

注意． a を負の定数とし，関数 $t \in [0,\, +\infty) \mapsto e^{a/t}$ の最大値を計算して，以下の不等式を満たす定数 $m_1 > m+2$ が存在すると，定理の条件 (2) が満たされる．

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{y\in B(x_n,\, r_n)} \int_{B(x_n,\, r_n)} \left(\frac{d_n(y,\, z) \wedge 1}{d_n(y,\, z)} \right)^{m_1} \mu_n(dz) < +\infty.$$

注意． 制限空間 $(M,\, d)$ 上の標準的 Dirichlet 形式を Cheeger-Colding の理論で定義する．

参考文献

[KS03] K. Kuwae and T. Shioya, *Convergence of spectral structures: a functional analytic theory and its applications to spectral geometry*, Communications in Analysis and Geometry (11), **4** (2003), 599–673.

[O01] Y. Ogura, *Weak convergence of laws of stochastic processes on Riemannian manifolds*, Probab. Theory Relat. Fields **119** (2001), 529–557.