線型成長模型の指数増大について

福島　竜輝
東京工業大学大学院理工学研究科
（京都大学大学院理学研究科　吉田伸生氏との共同研究）

1．概要

向きづけられた格子 $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}^d$ 上の oriented percolation について, $(0,0)$ と (n,x) を結ぶ open path の数 $N_{n,x}$ を考える． $N_n := (N_{n,x})_{x\in\mathbb{Z}^d}$ は $\mathbb{Z}_+$ を時間と見れば $[0,\infty)^{\mathbb{Z}^d}$ 上のランダムに時間発展する成長模型であり, 後で述べるように分枝法則が粒子の位置に強く依存する分枝過程と見なすこともできる．さて, 古典的な Galton-Watson 分枝過程については

絶滅しない $\Longrightarrow$ 総人口は指数増大する

という関係が知られている（例えば [1] 参照）．本研究では同じ関係が oriented percolation の open path を含む広いクラスの成長模型に対して成り立つことを示した [2].

2．一般化されたモデル

Oriented percolation において (n,x) と $(n+1,y)$ を結ぶ辺の open $(\Leftrightarrow 1)$, closed $(\Leftrightarrow 0)$ に対応する確率変数を $A_{n+1,x,y}$ とおくと上記の成長模型の時間発展は

$$N_{n+1,y} = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} N_{n,x} A_{n+1,x,y} \tag{1}$$

と記述される．これを以下のように一般化する：

1. $\{(A_{n,x,y})_{x,y\in\mathbb{Z}^d}\}_{n\in\mathbb{N}}$ は独立同分布なランダム行列,
2. 全ての (n,x,y) に対して $A_{n,x,y} \in \{0\} \cup [1,\infty)$,
3. 任意の $z \in \mathbb{Z}^d$ に対し $(A_{n,x+z,y+z})_{x,y\in\mathbb{Z}^d}$ は $(A_{n,x,y})_{x,y\in\mathbb{Z}^d}$ と同分布,
4. $N_0 := (\delta_{0,x})_{x\in\mathbb{Z}^d}$, $N_n := N_0 A_1 \cdots A_n$ （$\Leftrightarrow$ 時間発展は (1) と同じ）．

ここで空間的には独立性も有限レンジ（$\Leftrightarrow$ ある $M_A > 0$ が存在して $|x-y| \geq M_A$ ならば $A_{1,x,y} = 0$）とも仮定していないことに注意．この意味では [5] で導入された linear stochastic evolution より広いが, 一方「open path に沿っては減少しない」ために二番目の条件をおいている点では狭いクラスである．

Remarks. (i) 上の時間発展ルール (1) は, 時刻 n に x にいる粒子は次の時刻に y に $A_{n+1,x,y}$ の子孫を残すということを表しており,「同じ位置にいる粒子は同じ分裂をする」という意味で分枝法則が位置に強く依存する分枝過程と見なすことができる．
(ii) ここでは $N_0 := (\delta_{0,x})_{x\in\mathbb{Z}^d}$ の場合だけ扱うが, 初期値について線型であることに注意すると以下に述べる結果は任意の初期値について成り立つ．

3．結果

結果を述べるため次の量を導入する：

$$c_\delta(A_1) := P(N_n \neq 0 \text{ for all } n \in \mathbb{N}) P(\sup_{x\in\mathbb{Z}^d} A_{1,0,x} \geq 1+\delta). \tag{2}$$

Theorem. ある $\delta > 0$ に対して $c_\delta(A_1) > 0$ であるとする．このとき $\{N_n \neq 0 \text{ for all } n \in \mathbb{N}\}$ 上ほとんど至る所で以下を満たすランダムな路 $\{\Gamma(n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (\mathbb{Z}^d)^{\mathbb{N}}$ が存在する：

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log N_{n,\Gamma(n)} \geq c_\delta(A_1) \log(1+\delta). \tag{3}$$

とくに絶滅しない事象の上でほとんど確実に総人口は指数増大する．

元の確率過程 N_n を m-step 毎に見てこの定理を適用することにより以下の系を得る：

Corollary. ある $\delta > 0$ と $m \in \mathbb{N}$ に対して $c_\delta(A_1 \cdots A_m) > 0$ であるとする．このとき $\{N_n \neq 0 \text{ for all } n \in \mathbb{N}\}$ 上ほとんど至る所で以下を満たすランダムな路 $\{\Gamma(n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (\mathbb{Z}^d)^{\mathbb{N}}$ が存在する：

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log N_{n,\Gamma(n)} \geq \frac{1}{m} c_\delta(A_1 \cdots A_m) \log(1+\delta). \tag{4}$$

とくに絶滅しない事象の上でほとんど確実に総人口は指数増大する．

Remarks. (i) Oriented percolation は定理の仮定は満たさないが系の仮定は満たす．
(ii) A_1 が有限レンジであると仮定すると $N_{n,x} \neq 0$ となる x の数が高々多項式増大になることから, 系の仮定は実は必要条件であることが分かる．

定理の証明の基本的なアイデアは $A_{n,\Gamma(n-1),\Gamma(n)} \geq 1+\delta$ が n に比例した回数起こる（即ち大数の法則が成り立つ）ような open path を構成することである．しかし初めから open path になるように構成しようとすると未来に言及しながら行うことになるため $\{A_{n,\Gamma(n-1),\Gamma(n)} \geq 1+\delta\}_{n\in\mathbb{N}}$ の独立性が保証できず, 実現する回数を評価することが難しくなる．そこで今回は Kuczek が [4] において 1 次元 oriented percolation の right edge に対して中心極限定理を示す際に使った手法を参考にしてやや込み入った構成を行った．

4．関連する最近の研究

Kesten-Nazarov-Peres-Sidoravicius は [3] において

"maximal path" = 時刻 n までに最も多くの open site/bond を通った path

を考え, その数が常に（subcritical や critical においても）指数増大することを示した．これは percolate している事象の上では open path と一致するので oriented percolation の場合に限っては我々の結果を含んでいる．

5．参考文献

[1] S. Asmussen and H. Hering. *Branching processes*, volume 3 of *Progress in Probability and Statistics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1983.

[2] R. Fukushima and N. Yoshida. On exponential growth for a certain class of linear systems. *Preprint*, available at `http://www.math.titech.ac.jp/~ryoki/FY10.pdf`

[3] H. Kesten, F. Nazarov, Y. Peres, and V. Sidoravicius. Abundance of maximal path. *In preparation*

[4] T. Kuczek. The central limit theorem for the right edge of supercritical oriented percolation. *Ann. Probab.*, 17(4):1322–1332, 1989.

[5] N. Yoshida. Phase transitions for the growth rate of linear stochastic evolutions. *J. Stat. Phys.*, 133(6):1033–1058, 2008.