Ramer-Kusuoka 公式への代数的アプローチ

立命館大学 理工学研究科
天羽 隆史 (赤堀 次郎氏との共同研究)

1 抽象的な設定と記号の準備

自然数 N を固定し，$\mathscr{A}=\mathscr{A}_N$ を次の定義関係式を満たす文字 $\{\rho_i,\rho_i^*,\kappa_i : i=1,2,\cdots,N\}$ が生成する $\mathbb{R}$ 上の代数とする: 全ての $i,j,k=1,2,\cdots,N$ に対して

$$[\rho_i,\rho_j]=0,\quad [\rho_i^*,\rho_j^*]=0,\quad [\kappa_i,\kappa_j]=0,$$

$$[[\rho_i^*,\kappa_j],\kappa_k]=0,\quad [[\rho_i^*,\kappa_j],[\rho_k^*,\kappa_l]]=0,$$

$$[\rho_i+\rho_i^*,\kappa_i]=0,\quad [\rho_i+\rho_i^*,[\rho_j^*,\kappa_k]]=0,\quad [\rho_i+\rho_i^*,\rho_j+\rho_j^*]=0.$$

例 この代数としては例えば次の簡単な例を考えている: $N=1$ として考える. $p(x)$ を $\mathbb{R}$ 上で定義された滑らかな正値関数，∂ を微分作用素，$g\in C_0^\infty(\mathbb{R})=\{\text{compactly supported smooth function on } \mathbb{R}\}$ に対して

$$\partial^* g=-\partial g-(\partial\log p)\cdot g$$

と定める．任意に $f\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ を取ると $\{\partial,\partial^*,f\}$ は上の交換関係を満たし，それらが生成する代数は $\mathscr{A}_1$ となる.

代数 A が与えられたとき，その元を係数とする t の形式的ベキ級数環を $A[\![t]\!]$ で表す．$f(t)=\sum_{n=0}^\infty \frac{t^n}{n!}f_n\in A[\![t]\!]$ に対して

$$f'(t):=\sum_{n=0}^\infty \frac{t^n}{n!}f_{n+1},\quad \int_0^t f(s)ds:=\sum_{n=1}^\infty \frac{t^n}{n!}f_{n-1}$$

と定める．これらは当然また $A[\![t]\!]$ の元を定める．特に $f_0=0$ の場合には

$$\exp f(t)=1+f(t)+\frac{1}{2}f(t)^2+\frac{1}{3!}f(t)^3+\frac{1}{4!}f(t)^4+\cdots$$

は t の低次の項から順に定まり，やはり $A[\![t]\!]$ の元を一つ定める.

$a \in \mathscr{A}$ に対して $:a: \in \mathscr{A}$ を以下で帰納的に定義する: (i) $:a:$ は a に関して線形 (ii) コロンの中では全ての元は可換であり，(iii) 単項式に対しては

$$:\kappa_{i_1}\cdots\kappa_{i_l}\rho^*_{j_1}\cdots\rho^*_{j_m}\rho_{k_1}\cdots\rho_{k_n}: = \kappa_{i_1}\cdots\kappa_{i_l}\rho^*_{j_1}\cdots\rho^*_{j_m}\rho_{k_1}\cdots\rho_{k_n}.$$

また，$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}f_n \in \mathscr{A}[\![t]\!]$ に対して $:f(t): = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!} :f_n: \in \mathscr{A}[\![t]\!]$ と定める．

$$\rho_\kappa := \sum_{k=1}^{N}\kappa_k\rho_k, \quad \rho^*_\kappa := \sum_{k=1}^{N}\kappa_k\rho^*_k$$
$$\phi_{ij} := \rho^*_i\kappa_j, \quad \psi_{ij} := [\rho^*_i, \kappa_j]$$

と定め，$\Phi := (\phi_{ij})_{1\le i,j\le N}, \Psi := (\psi_{ij})_{1\le i,j\le N}$ とおく．$\{\phi_{ij} : 1 \le i,j \le N\}$ は互いに可換であるから Ψ の行列式は通常の形で定義できることに注意する．

2　$\mathscr{A}[\![t]\!]$ の中で得られる諸公式

定理 1. $\mathscr{A}[\![t]\!]$ の元として

$$\Big(:\exp t(\rho_\kappa + \rho^*_\kappa):\Big)\Big(:\exp t(-\rho_\kappa):\Big) = :\exp t\rho^*_\kappa:$$

が成り立つ．

定理 2. $\mathscr{A}[\![t]\!]$ の元として

$$\det(1+t\Psi) :\exp t\rho^*_\kappa: = 1 + \int_0^t g'(s) :\exp s\rho^*_\kappa: ds$$

が成り立つ．ここで

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\sum_{i_1,\cdots,i_n}\rho^*_{i_1}\det\begin{pmatrix}\kappa_{i_1} & \cdots & \kappa_{i_n}\\ \psi_{i_2i_1} & \cdots & \psi_{i_2i_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \psi_{i_ni_1} & \cdots & \psi_{i_ni_n}\end{pmatrix} \in \mathscr{A}[\![t]\!]$$

である．

これらから $\mathscr{A}[\![t]\!]$ の中での等式

pre-$\boxed{\mathrm{R}}\boxed{\mathrm{K}}$

$$\det(1+t\Psi) :\exp t(\rho_\kappa + \rho^*_\kappa): :\exp t(-\rho_\kappa): = 1 + \int_0^t g'(s) :\exp s\rho^*_\kappa: ds$$

が得られるが，$\mathscr{A}[\![t]\!]$ を例えば Wiener 空間上に表現したときにこの等式が Ramer-Kusuoka タイプの公式を意味することを説明したい．

3 $\mathscr{A}[\![t]\!]$ の Wiener 空間上での表現

Cameron-Martin 空間の正規直交系 $\xi_1, \cdots, \xi_N$ と $z_1, \cdots, z_N \in \mathbb{D}_\infty$ を取る．ここで $\mathbb{D}_\infty$ は Meyer-Watanabe のテスト関数空間である．

$$\varphi(\rho_i) = D_i, \quad \varphi(\rho_i^*) = D_i^*, \quad \varphi(\kappa_i) = z_i$$

によって $\mathscr{A}$ を表現する．ここで D_i は ξ_i 方向への微分，D_i^* は

$$D_i^* F(w) = -D_i F(w) + \int_0^1 \dot{\xi}_i(s) dw(s) \cdot F(w), \quad F \in \mathbb{D}_\infty$$

で定義されるものである．これは $a(t) = \sum_{n=0}^\infty t^n a_n \in \mathscr{A}[\![t]\!]$ と $F(t) \in \mathbb{D}_\infty[\![t]\!]$ に対して $\varphi(a(t))F(t) := \sum_{n=0}^\infty t^n \varphi(a_n) F(t) \in \mathbb{D}_\infty[\![t]\!]$ と定めることで $\mathscr{A}[\![t]\!]$ に表現空間 $\mathbb{D}_\infty[\![t]\!]$ を提供することができる．

$[0,1]$ 上の可測過程 $z = (z(t))$ を

$$z = \sum_{n=1}^N z_k \xi_k$$

で定める．また $F \in \mathbb{D}_\infty$ と Cameron-Martin 空間の元 ξ に対して $\tau_{t\xi} F := \sum_{n=0}^\infty \frac{t^n}{n!} D_\xi^n F \in \mathbb{D}_\infty$ と定める．さらに $F(t) = \sum_{n=0}^\infty t^n F_n \in \mathbb{D}_\infty[\![t]\!]$ の期待値を

$$E[F(t)] := \sum_{n=0}^\infty t^n E[F_n] \in \mathbb{R}[\![t]\!]$$

と定義する．

このときこの期待値の意味で

$$E[F] = E\Big[(\tau_{-tz}F)\ \det(1 - tDz) e^{t\,\mathrm{tr} Dz} \exp\Big\{ t \int_0^1 \dot{z}(s) \delta w(s) - \frac{t^2}{2} \int_0^1 \dot{z}(s)^2 ds \Big\}\Big]$$

が得られることを説明したい．

今回は Wiener 空間でこの代数を表現したけれども，一般に Lévy process の分布を入れた空間に表現すれば，Lévy process に対する Cameron-Martin タイプの公式，Maruyama-Girsanov タイプの公式，Ramer-Kusuoka タイプの公式が得られるはずであることを注意したい．

参考文献

[1] Akahori, J.; Amaba, T.; Uraguchi, S., *An Algebraic Approach to the Cameron-Martin-Maruyama-Girsanov Formula*, 2010, eprint arXiv:1004.4173

[2] Akahori, J.; Amaba, T., *"An algebraic approach to the Ramer-Kusuoka formula"* in preparation.