Eigenvalue processes of Ginibre ensemble and their properties

藪奥 哲史 (千葉大学大学院理学研究院)

1 導入

Ginibre Ensemble (GE) の時間発展による固有値過程について議論する. GE はランダム行列のモデルであり, 行列成分が独立な複素正規分布に従う非対称行列である. GE の固有値は複素数値で, その経験分布は複素単位円板上の一様分布に確率 1 で収束する [1]. 近年この GE に対する時間発展モデルが研究されつつあるが ([2],[3]), このモデルは非正規行列であるため, 従来のエルミート行列に対する手法が適用できない. そこで本講演では陰関数定理によってこの固有値過程の確率微分方程式を具体的に導出し, さらにその固有ベクトルが固有値過程の挙動に影響を与えることを示す. このことはエルミート行列の固有値の時間発展モデルである Dyson ブラウン運動の場合とは大きく異なる.

2 ランダム行列の時間発展モデル

まず正規行列の, 特にエルミート行列の固有値過程である Dyson ブラウン運動を述べる. N 次エルミート行列値確率過程 $H(t) = (h_{ij}(t))_{1\le i,j\le N}$ を次のように定める:

$$h_{ij}(t) := \begin{cases} B_{ii}(t) & i=j \\ \frac{B^R_{ij}(t)+\sqrt{-1}B^I_{ij}(t)}{\sqrt{2}} & i<j \\ \overline{h_{ji}(t)} & i>j \end{cases} ,\ t>0$$

ここで $B_{ii}, B^R_{ij}, B^I_{ij} (i<j)$ は独立な 1 次元標準ブラウン運動である.
$H(t)$ は N 個の実固有値 $\lambda_1(t) \ge \ldots \ge \lambda_N(t)$ をもち, この固有値過程は 1 次元非衝突ブラウン運動と解釈できることが知られている.

Theorem (Dyson 1962 [4])**.**
$H(t)$ の実固有値過程 $\boldsymbol{\lambda}(t) = (\lambda_1(t), \cdots, \lambda_N(t))$ は次の確率微分方程式を満たす:

$$d\lambda_i(t) = dB'_i(t) + \sum_{j(\ne i)} \frac{1}{\lambda_i(t)-\lambda_j(t)} dt\ ,\quad i=1,\cdots,N$$

ここで $B'_1, \cdots, B'_N$ は独立な 1 次元標準ブラウン運動である.

Dyson ブラウン運動では, 他の固有値との相互作用を表す差の逆数の和がドリフト項に現れる.
次に GE の時間発展モデルとして N 次非対称, 非正規行列値確率過程 $G(t) = (G_{ij}(t))_{1\le i,j\le N}$ を次のように定める:

$$G_{kl}(t) = B_{kl}(t) := B^R_{kl}(t) + \sqrt{-1}B^I_{kl}(t),\quad 1\le k,l\le N,\quad t>0$$

ここで $B^R_{kl}, B^I_{kl},\ 1 \le k, l \le N$ は独立な 1 次元標準ブラウン運動であり, B_{kl} は複素ブラウン運動である. $G(t)$ は N 個の複素固有値をもつ. このとき陰関数定理と伊藤の公式によって次の結果を得る.

Theorem 1 (Y)**.**
$G(t)$ の複素固有値過程 $\boldsymbol{\lambda}(t) = (\lambda_1(t), \cdots, \lambda_N(t))$ は次の確率微分方程式を満たす:

$$d\lambda_i(t) = \sum_{1 \le k,l \le N} \frac{-det\left((\lambda_i(t)I_N - G(t))_{k|l}\right)}{\prod_{j(\neq i)} \Big(\lambda_i(t) - \lambda_j(t)\Big)} dB_{kl}(t), \quad i = 1, \cdots, N$$

ここで I_N は単位行列で, 正方行列 A に対して $A_{k|l}$ は A から k 行 l 列を取り除いて得られる小行列である.

この結果から GE の固有値過程はマルチンゲールであり, 他の固有値との相互作用を表す差積がマルチンゲール項に現れることがわかる.
さらに Bourgade, Dubach [3] の結果を用いると, 相互変分について

$$d\langle \lambda_i, \lambda_j \rangle_t = 0, \quad d\langle \lambda_i, \overline{\lambda_j} \rangle_t = 2\mathcal{O}_{ij}(t)dt.$$

が成り立つ. ここで $\mathcal{O}_{ij}(t)$ は固有ベクトルの Overlap と呼ばれ, 右固有ベクトル $R_j(t) \in \mathbb{C}^N$ と左固有ベクトル $L_j(t) \in \mathbb{C}^N$ によって

$$\mathcal{O}_{ij}(t) := \Big(R_j(t)^* R_i(t)\Big)\Big(L_j(t)^* L_i(t)\Big)$$

で定義される量である. 彼らは $G(t)$ を正則行列によって対角化することで, 固有値過程の相互変分が固有ベクトルの内積で記述できることを示した. この Overlap を具体的に表すと次のようになる.

Proposition 2 (Y)**.**

$$\mathcal{O}_{ii}(t) = \frac{\sum_{k=1}^N det\left(\left((\lambda_i(t)I_N - G(t))(\lambda_i(t)I_N - G(t))^*\right)_{k|k}\right)}{\prod_{i(\neq p)} |\lambda_i(t) - \lambda_p(t)|^2}$$

$$\mathcal{O}_{ij}(t) = \frac{\sum_{k=1}^N det\left(\left((\lambda_i(t)I_N - G(t))(\lambda_j(t)I_N - G(t))^*\right)_{k|k}\right)}{\prod_{p(\neq i)}(\lambda_i(t) - \lambda_p(t)) \prod_{q(\neq j)} \overline{(\lambda_j(t) - \lambda_q(t))}}$$

以上のことから, GE の場合 Overlaps が固有値過程に影響を与えていることがわかる. これは Dyson ブラウン運動などの正規行列のモデルでは起こらなかったことであり, 非正規行列特有の現象である. 本講演では上の結果からさらに固有値過程の時間変更による表示について議論する. また数値実験の結果 [5] についても言及する.

参考文献

[1] M. L. Mehta, Random Matrices, second edition, Academic Press (1991).

[2] J.Grela, P.Warchol, Full Dysonian dynamics of the complex Ginibre ensemble, J. Phys. A: Math. Theor. Vol.51, Num.425203(2018)

[3] P. Bourgade, G. Dubach, The distribution of overlaps between eigenvectors of Ginibre matrices, arXiv:1801.01219v1 (2018)

[4] F. J. Dyson, A Brownian-motion model for the eigenvalues of a random matrix, J. Math. Phys.,Vol. 3, 1192-1198 (1962)

[5] J.-P.Blaizot, J.Grela, M.A.Nowak, W.Tarnowski, P.Warchol, Ornstein-Uhlenbeck diffusion of hermitian and non-hermitian matrices-unexpected links, J.Stat.Mech.Vol.2016,May,054037(2016)