A limit theorem for persistence diagrams of random complexes built over marked point processes [*1]

九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所 学術研究員　須崎 清剛[*2]

ある現象を観測して得られたデータの多くは，Euclid 空間内の有限集合として表現される．いま，初期時刻でデータが入力され，時刻 t で各データ点を中心とする半径 t の閉球を与える．すなわち，時間とともに各データ点を太らせていく過程を考える．この過程は，データ集合を様々な解像度で解析していると見なすこともできる．各時刻で閉球の和とホモトピー同値な脈体を対応させたとき，単体複体の増大列が得られるが，横軸を発生（birth）時刻，縦軸を消滅（death）時刻として，その増大列中の q 次ホモロジー類の発生・消滅を $\Delta = \{(x,y) \in [0,\infty]^2 : 0 \leq x < y \leq \infty\}$ 上にプロットした図は，q 次パーシステンス図と呼ばれる．

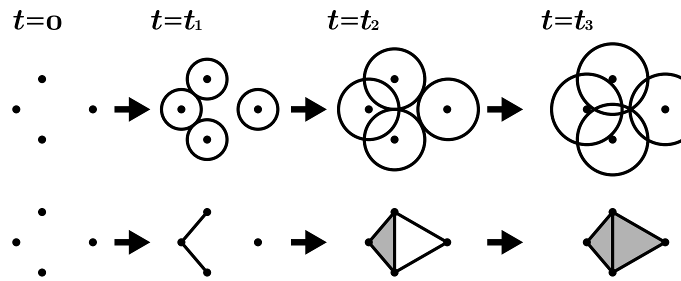

図 1　下部は閉球の和の脈体（Čech 複体）

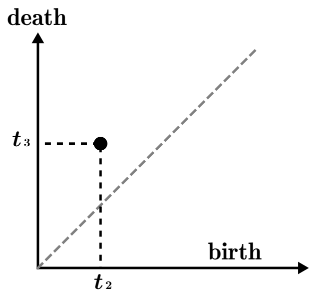

図 2　1 次パーシステンス図

本講演では，マーク付き点過程に対してある規則で単体複体の増大列を対応させた際のパーシステンス図について考える．本研究は，九州大学の白井朋之氏との共同研究に基づく．

集合 S に対して $\mathcal{F}(S)$ を S の非空の有限部分集合全体とし，$\mathbb{M}$ を Polish 空間とする．$\kappa : \mathcal{F}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{M}) \to [0,\infty]$ は次の条件 (K1), (K2) をみたすとする．

(K1) $A \subset B$ ならば $\kappa(A) \leq \kappa(B)$.

(K2) 単調非減少な $\rho : [0,\infty] \to [0,\infty]$ が存在して，$t < \infty$ ならば $\rho(t) < \infty$ をみたし，すべての $(x,m), (y,n) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{M}$ に対して，$|x-y| \leq \rho(\kappa(\{(x,m),(y,n)\}))$ が成立する．

また，場合によって κ には以下の平行移動・回転不変性を仮定する．

(T) すべての $x \in \mathbb{R}^d$ に対して，$\kappa(T_x A) = \kappa(A)$ が成り立つ．ここで，$T_x : \mathcal{F}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{M}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{M})$ は $T_x A = \{(y+x,m) : (y,m) \in A\}$ である．

(R) すべての $U \in O(d)$ に対して，$\kappa(R_U A) = \kappa(A)$ が成り立つ．ここで，$O(d)$ は d 次直交行列全体，$R_U : \mathcal{F}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{M}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{M})$ は $R_U A = \{(Ux,m) : (x,m) \in A\}$ である．

$\pi : \mathbb{R} \times \mathbb{M} \to \mathbb{R}$ を標準射影とする．$\tilde{\Xi} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{M})$ が単純であるとは，$\pi|_{\tilde{\Xi}}$ が単射となるときをいい，このとき $\Xi = \pi(\tilde{\Xi})$ と表す．単純な $\tilde{\Xi} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{M})$ に対しては，π により自然な全単射 $\mathcal{F}(\tilde{\Xi}) \ni \tilde{\sigma} \mapsto \sigma \in \mathcal{F}(\Xi)$ が誘導され，各 $\tilde{\sigma} = \{(x_0,m_0),(x_1,m_1),\ldots,(x_q,m_q)\}$ は，$\mathbb{R}^d$ 内の有限点配置 $\sigma = \{x_0,x_1,\ldots,x_q\}$ にマーク $\{m_0,m_1,\ldots,m_q\}$ が付加されていると見なせる．単純な $\tilde{\Xi} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{M})$ が与えられたとき，抽象単体複体の増大列 $\mathbb{K}(\tilde{\Xi}) = \{K(\tilde{\Xi},t)\}_{t \geq 0}$ を

$$K(\tilde{\Xi},t) = \{\sigma \subset \Xi : \kappa(\tilde{\sigma}) \leq t\}$$

[*1] 本研究は，JST CREST JPMJCR15D3 の支援を受けたものである．

[*2] k-suzaki@imi.kyushu-u.ac.jp

で定める．すなわち $\kappa(\tilde{\sigma})$ は，$\mathbb{K}(\tilde{\Xi})$ における単体 σ の発生時刻である．$\mathbb{K}(\tilde{\Xi})$ を κ-フィルトレーションと呼ぶ．κ の基本的な例については，講演中に述べる．

非負整数 q に対して，$H_q(K(\tilde{\Xi},t))$ を体上の $K(\tilde{\Xi},t)$ の q 次ホモロジー群とし，$r \le s$ に対して，$\iota_r^s : H_q(K(\tilde{\Xi},r)) \to H_q(K(\tilde{\Xi},s))$ を包含写像 $K(\tilde{\Xi},r) \hookrightarrow K(\tilde{\Xi},s)$ から誘導される線形写像とする．$H_q(\mathbb{K}(\tilde{\Xi})) = (\{H_q(K(\tilde{\Xi},t))\}_{t\ge 0}, \{\iota_r^s\}_{r\le s})$ は，q 次パーシステントホモロジー群と呼ばれる．単項イデアル整域上の次数付き加群の構造定理により，$H_q(\mathbb{K}(\tilde{\Xi}))$ は区間分解

$$H_q(\mathbb{K}(\tilde{\Xi})) \simeq \bigoplus_{i=1}^{n_q} I(b_i,d_i)$$

をもつことが知られている ([2])．ここで $I(b_i,d_i)$ は，ある q 次ホモロジー類が $\mathbb{K}(\tilde{\Xi})$ において $t=b_i$ で発生し，$b_i \le t < d_i$ 間で持続し，$t=d_i$ で消滅することを表している．多重集合 $D_q(\tilde{\Xi}) = \{(b_i,d_i) \in \Delta : i=1,2,\ldots,n_q\}$ を q 次パーシステンス図という．我々は $D_q(\tilde{\Xi})$ を数え上げ測度

$$\xi_q(\tilde{\Xi}) = \sum_{(b_i,d_i)\in D_q(\Xi)} \delta_{(b_i,d_i)}$$

と同一視し，パーシステンス図の収束を Radon 測度の漠収束で考える．

$\tilde{\Phi}$ は $\mathbb{R}^d \times \mathbb{M}$ 上の点過程であって，$\mathbb{R}^d$ へ射影した点過程 $\Phi(\cdot) = \tilde{\Phi}(\cdot \times \mathbb{M})$ が $\mathbb{R}^d$ 上の単純点過程となるとき，$\mathbb{M}$ をマーク空間とする $\mathbb{R}^d$ 上のマーク付き点過程であるという．作用 $\{T_x\}_{x\in\mathbb{R}^d}$ と $\{R_U\}_{U\in O(d)}$ は，$\mathbb{R}^d \times \mathbb{M}$ 上の配置空間へ自然な作用を与えるが，$\tilde{\Phi}$ に対する定常性とエルゴード性，および等方性は，これら作用に関するものとして定義される．また，Φ が全有限モーメントをもつとは，$\mathbb{R}^d$ の任意の有界な Borel 可測集合 A と $p \ge 1$ に対して，$\mathbb{E}[\Phi(A)^p] < \infty$ が成り立つときをいう．各 $L>0$ に対して，$\Lambda_L = [-L/2, L/2)^d \times \mathbb{M}$ とおく．$\tilde{\Phi}$ から定まるランダムな κ-フィルトレーション $\mathbb{K}(\tilde{\Phi}|_{\Lambda_L}) = \{K(\tilde{\Phi}|_{\Lambda_L},t)\}_{t\ge 0}$ に対応する q 次パーシステンス図 $\xi_q(\tilde{\Phi}|_{\Lambda_L})$ を，簡単に $\xi_{q,L}$ と表す．多次元エルゴード定理を応用して，次のことを示すことができる．

定理 1. κ は (T) をみたし，$\tilde{\Phi}$ は定常マーク付き点過程で，その $\mathbb{R}^d$ への射影点過程 Φ は全有限モーメントをもつと仮定する．このとき各 $q \ge 0$ に対して，Δ 上の Radon 測度 ν_q が存在して，$L\to\infty$ のとき $\mathbb{E}[\xi_{q,L}]/L^d \xrightarrow{v} \nu_q$ が成立する．ここで $\xrightarrow{v}$ は漠収束を表す．さらに κ は (R)をみたし, $\tilde{\Phi}$ がエルゴード的で等方的であれば, ほとんど確実に $L\to\infty$ のとき

$$\frac{1}{L^d}\xi_{q,L} \xrightarrow{v} \nu_q$$

が成立する．

証明は，点過程のパーシステンス図の極限定理について論じている [1] で用いられている手法を，マーク付き点過程版へ拡張して行う．

参考文献

[1] Y. Hiraoka, T. Shirai and K. D. Trinh, *Limit theorems for persistence diagrams*, Ann. Appl. Probab. **28** (2018) 2740–2780.

[2] A. Zomorodian and G. Carlsson, *Computing persistent homology*, Discrete Comput. Geom. **33** (2005) 249–274.