# Superdiffusion of energy in harmonic chains with noises and long-range interactions


須田 颯 (東京大学大学院数理科学研究科)


2018 年 12 月 20 日

本講演では, 確率的な摂動を含む長距離相関調和振動子鎖モデル $\{(p_x(t), q_x(t)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; x \in \mathbb{Z}, t \geq 0\}$,

$$\begin{cases} dq_x(t) = p_x(t)dt \\ dp_x(t) = -\sum_{z\in\mathbb{Z}} \alpha(x-z)q_z(t)dt + \sqrt{\gamma}(noises) \end{cases}$$

におけるエネルギー分布の時空スケール極限を考察する. すなわち, スケールパラメータを $0 < \epsilon < 1$ とした時,

$$\lim_{\epsilon\to 0+} \epsilon \sum_{x\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}[e_x(\frac{t}{f(\epsilon)})]\delta_{\epsilon x} = \mathbf{e}(y,t)dy$$

なる非自明な極限 $\mathbf{e}(y,t)dy$ が得られるような時空スケーリング比 $f(\epsilon)$, 及び $\mathbf{e}(y,t)$ の満たす偏微分方程式を求める. ここで, $p_x(t), q_x(t), e_x(t) := \frac{1}{2}|p_x(t)|^2 - \frac{1}{4}\sum_{z\in\mathbb{Z}, z\neq x} \alpha(x-z)|q_x(t) - q_z(t)|^2$ は $x$ 番目の振動子の時刻 $t$ における運動量, 位置, エネルギーを表す. $\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ は振動子間の相互作用ポテンシャルであり, $\sum_x \alpha(x) = 0, \quad \alpha(x) = \alpha(-x), x \in \mathbb{Z}, \quad \alpha(x) \leq 0, x \neq 0$ を満たす. $\gamma > 0$ は確率的摂動の強度である.

[1, 2] [3] では, $|\alpha(x)| \leq e^{-C|x|}, x \in \mathbb{Z}$ なる $C > 0$ が存在し, $\gamma = \epsilon^s\gamma_0, 0 \leq s \leq 1, \gamma_0 > 0$ として摂動もスケールされている場合, $f(\epsilon) = \epsilon^{\frac{3-s}{2}}$, $\partial_t\mathbf{e}(y,t) = -C_{\gamma_0,\alpha}(-\Delta)^{\frac{3}{4}}\mathbf{e}(y,t)$ であることが示されている. $C_{\gamma_0,\alpha} > 0$ は $\gamma_0, \alpha$ によって決まる定数である. これは相互作用ポテンシャル $\alpha$ が指数的減衰をする場合, 本質的に nearest neighbor interaction $(\alpha(0) = 2, \alpha(\pm 1) = -1, \alpha(x) = 0, |x| \geq 2)$ の場合と同じエネルギー分布の挙動が観測されることを意味しており, 長距離相関が巨視的に影響していない.

講演者は, $\alpha(x) = -|x|^{-\theta}, \theta > 2$, $\gamma = \epsilon^s\gamma_0, 0 \leq s \leq 1, \gamma_0 > 0$ の場合,

$$\begin{aligned} 2 < \theta < 3 \quad &\longrightarrow \quad f(\epsilon) = \epsilon^{\frac{6-s(\theta-1)}{7-\theta}}, \quad \partial_t\mathbf{e}(y,t) = -C_{\gamma_0,\theta}(-\Delta)^{\frac{3}{7-\theta}}\mathbf{e}(y,t), \\ \theta > 3 \quad &\longrightarrow \quad f(\epsilon) = \epsilon^{\frac{3-s}{2}}, \quad \partial_t\mathbf{e}(y,t) = -C_{\gamma_0,\theta}(-\Delta)^{\frac{3}{4}}\mathbf{e}(y,t), \\ \theta = 3 \quad &\longrightarrow \quad \epsilon^{\frac{3-s}{2}} < f(\epsilon) < \epsilon^{\frac{3-s}{2}-\delta}, \forall\delta > 0, \quad \partial_t\mathbf{e}(y,t) = -C_{\gamma_0,\theta}(-\Delta)^{\frac{3}{4}}\mathbf{e}(y,t) \end{aligned}$$

であることを示した. これから $2 < \theta < 3$ の場合は長距離相関が巨視的にも影響しており, $\theta = 3$ の場合も時間スケーリングがわずかに速くなることが分かる. $2 < \theta \leq 3$ の時は特に, sound speed と呼ばれる量 $\frac{\widehat{\alpha}'(k)}{\sqrt{\widehat{\alpha}(k)}}, \quad \widehat{\alpha}(k) := \sum_{x\in\mathbb{Z}} \alpha(x)e^{-2\pi kx}, k \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ が $k \to 0$ で発散する. 上記の指数的減衰や $\theta > 3$ の場合, sound speed は常に有界であり, この顕著な違いがエネルギー分布の挙動に影響している.

## 参考文献


[1] G. Basile, S. Olla, H. Spohn : *Energy transport in stochastically perturbed lattice dynamics.* Arch. Ration. Mech. **195**, 171–203 (2009)

[2] M. Jara, T. Komorowski, S. Olla : *A limit theorem for an additive functionals of Markov chains*. Ann. Appl. Probab. **19**, 2270–2230 (2009)

[3] M. Jara, T. Komorowski, S. Olla : *Superdiffusion of Energy in a Chain of Harmonic Oscillators with Noise*. Commun. Math. Phys. **339**, 407–453 (2015)