Nelson 拡散過程と非線形 Schrödinger 方程式（ Nelson Diffusions and Nonlinear Schrödinger equations）

名和 範人（Hayato NAWA），明治大学 理工学部 数学科

1. 非線形 Schrödinger 方程式

次の擬共型不変な非線形 Schrödinger 方程式の初期値問題について考える：

$$\begin{cases} 2i\dfrac{\partial\psi}{\partial t} + \triangle\psi + |\psi|^{4/d}\psi = 0, & (x,t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+, \\ \psi(0) = \psi_0 \in H^1(\mathbb{R}^d). \end{cases}$$

ここで，$H^1(\mathbb{R}^d)$ は 1 階の超関数微分までが自乗可積分であるような関数のクラス，通常の Sobolev 空間，を表す．この初期値問題の局所適切性はよく知られた古典的な事実で，$\|\nabla\psi_0\|$ のみに依存する最大延長時間 $T_{\max} \in (0,\infty]$ があって，$\psi \in C([0,T_{\max}); H^1(\mathbb{R}^d))$ なる一意解を持ち，次の「ビーム強度 (または粒子数)」，「ハミルトニアン (またはエネルギー)」と呼ばれる量が保存則する [7]:

$$\|\psi(t)\| := \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\psi(x,t)|^2 dx\right)^{1/2} = \|\psi_0\|, \qquad \mathcal{H}(\psi(t)) := \|\nabla\psi(t)\|^2 - \frac{2}{2+\frac{4}{d}}\|\psi(t)\|_{2+\frac{4}{d}}^{2+\frac{4}{d}} = \mathcal{H}(\psi_0).$$

上式では次の記号を用いた：関数 f に対して $\|f\|_p := \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$.

我々の初期値問題は様々な解を持つが，特に興味があるのが爆発解である．爆発 (blowup) とは，

$$0 < T_{\max} < \infty, \qquad \lim_{t\to T_{\max}} \|\nabla\psi(t)\| = \infty$$

となることを言う．擬共型不変な非線形 Schrödinger 方程式は $d = 2$ のとき，非線形媒質中伝播するレーザービームの自己集束モデル（Kerr 効果）として現れ（例えば [2]），解の爆発はビームの集束を表現していると考えられる（この場合の時間軸は実際の時間ではなく，ビームの進行方向に平行な空間の第 3 軸となっている）．我々は，この爆発解の爆発スピードに興味がある．

2. Nelson 拡散過程

量子力学の基礎方程式である Schrödinger 方程式の初期値問題の解に対して，量子力学と同じ予言を与える確率過程（Nelson 拡散過程 [5]）を構成することができた [1]．非線形 Schrödinger 方程式に対しても，同様な確率過程を構成できる: 経路の空間 $C\big([0,T_{\max}),\mathbb{R}^d\big)$ 上に "確率変数"

$$\begin{array}{rccccl} X_t: & C\big([0,T_{\max}),\mathbb{R}^d\big) & \longrightarrow & \mathbb{R}^d & & \\ & \Psi & & \Psi & & \\ & \gamma & \longmapsto & \gamma(t) & =: & X_t(\gamma). \end{array}$$

を導入すると，$C\big([0,T_{\max}),\mathbb{R}^d\big)$ の上に

$$P[X_t \in dx] = \frac{|\psi(x,t)|^2 dx}{\|\psi_0\|^2}.$$

なる確率測度 P が存在して，P は，次の汎関数 B_t が Brown 運動になるようなものとして特徴付けられる：

$$B_t \stackrel{def}{:=} X_t - X_0 - \int_0^t b(X_\tau,\tau)d\tau.$$

ドリフト項 b は Schrödinger 方程式 の解から，$\psi \neq 0$ のとき $b := (\Im + \Re)\dfrac{\nabla\psi}{\psi}$，$\psi = 0$ のときは $b := 0$ と定義されている．

3. Brown 運動の重対数法則と爆発スピード

我々の爆発解は，$\{|\psi(x,t)|^2 dx\}_{0<t<T\max}$ が tight であれば，

$$|\psi(x,t)|^2 dx \rightharpoonup \sum_{j=1}^{N} A_j \delta_{a^j}(dx) + \mu(dx) \qquad \text{as} \qquad t \to T_{\max}$$

と振る舞うことがわかっている [4]．ここで，A_j $(j = 1, 2, \dots, N)$ は，ある "閾値" $\mathcal{N}_0$ より大きな正数，$\delta_{a^j}(dx)$ は $\mathbb{R}^d$ 内の点 a^j に台を持つ Dirac 測度，μ は Lebesgue 測度に対して絶対連続であると予想されているが，特殊な場合を除いて，よく分かってはいない．"閾値" $\mathcal{N}_0$ より，少しだけ大きな L^2 ノルムを持つ爆発解に対しては（$d = 1, 2, 3, 4$），次の評価が知られている [6, 3]：

$$\|\nabla\psi(t)\| \asymp \sqrt{\frac{\ln\ln(T_{\max} - t)^{-1}}{T_{\max} - t}}.$$

この振る舞いを，「業界」では loglog law と呼んでいる [7]．ここでは，この問題を少し別の角度から見てみることにする．上のような極限形状を持つことなどを利用して，爆発スピードを Brown 運動を用いて評価することができる．次を仮定する：

$$\int_0^{T_{\max}} \|\nabla\psi(t)\| dt < \infty, \qquad \lim_{t \to T_{\max}} \|\nabla\psi(t)\| \int_t^{T_{\max}} \|\nabla\psi(\tau)\| d\tau = \infty.$$

Theorem 1. 十分大きな $M > 0$ が存在して，

$$P\left[\, |\, B_{T_{\max}} - B_t \,| \,\le\, M \int_t^{T_{\max}} \|\nabla\psi(\tau)\| d\tau, \;\; e.f. \,\right] = 1$$

が成り立つ．

上からの評価には，さらに「技術的」な仮定が必要ではあるが（詳細は講演時に），次の評価を得ることができる：十分小さな $\eta > 0$ に対して

$$P\left[\, |\, B_{T_{\max}} - B_t \,| \,\ge\, \eta \int_t^{T_{\max}} \|\nabla\psi(\tau)\| d\tau, \;\; i.o. \,\right] = 1$$

References

[1] Carlen, E.: Conservative diffusions, Commun. Math. Phys. **94** 293–315 (1983).

[2] Gadi, F.: "The Nonlinear Schrödinger equation: Singular Solutions and Optical Collaps", Applied Mathematical Sciences 192, Springer, Switzerland, 2015.

[3] Merle, F. and Raphael, P.: *Blow-up dynamics and upper bound on the blow up rate for critical nonlinear Schrödinger equation*, Ann. MAth. **16**, pp. 157–222 (2005)

[4] Nawa, H.: *Asymptotic and limiting profiles of blow-up solutions of the nonlinear Schrödinger equation with critical power*, Commun. Pure and Apllied Math. **52** (1999), pp. 193–270 (1999)

[5] Nelson, E.: "Quantum fluctuations", Princeton Unuversity Press, Princeton, NJ, 1984.

[6] Perelman, G.: *On the blow-up phenomenon for the critical nonlinear Schrödinger equation in 1 D*, Ann. Henri Poincare **2**, pp. 605–673 (2001)

[7] Sulem, C. and Sulem, P.-L.: "Nonlinear Schrödinger equation: Self-focusing and wave collaps", Applied Mathematical Sciences 139, Springer-verlag, New York, 1999.