Sierpinski gasket 格子上の長距離浸透モデルにおけるランダムウォークの混合時間と等周定数

三角　淳 （高知大学）

基本的なフラクタル格子の 1 つである Sierpinski gasket 格子上での長距離浸透モデルに対して、ランダムグラフ上のランダムウォークの混合時間の評価 ([3]) と、ランダムグラフの等周定数について考える。

平面上の点 $\mathrm{O} = (0,0)$, $u_0 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $v_0 = (1,0)$ に対して、三角形 $\mathrm{O}u_0v_0$ の 3 個の頂点と 3 本の辺からなるグラフを G_0 とする。さらに、$u_n = 2^n u_0$, $v_n = 2^n v_0$ とし、有限グラフの列 $\{G_n\}_{n=0}^{\infty}$ を

$$G_{n+1} = G_n \cup (G_n + u_n) \cup (G_n + v_n) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

によって定義する。$G = \cup_{n=0}^{\infty} G_n$ を Sierpinski gasket 格子 (pre-Sierpinski gasket) と呼ぶ。以下では G_n の頂点集合を V_n で表す。

n を固定し、有限グラフ G_n 上で長距離浸透モデルの問題を考える。すなわち、$p(1) = 1$,

$$p(k) = 1 - \exp(-\beta k^{-s}) \quad (k = 2, 3, 4, \cdots)$$

（β, s は正の実数）として、各 $x, y \in V_n$ $(x \neq y)$ に対して独立に、確率 $p(|x-y|)$ で、2 点 x, y がランダムな辺で結ばれるとする。（$|x-y|$ は、G_n 上における 2 点間の最短ステップ数。）V_n に属する頂点と、上記の規則によって作られるランダムな辺からなるランダムグラフを G'_n とおく。なお、ここでは向き付けられた辺集合を考え、x, y が辺で結ばれているときには辺 (x,y) と 辺 (y,x) が存在しているとみなす。また、G_n 上の長距離浸透モデルに対する確率測度を $\mathbb{P}$ で表す。

ランダムグラフ G'_n の形状を固定するごとに、その上で、推移確率 $P(x,y) = P(X_{t+1} = y | X_t = x)$ が

$$P(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2\deg(x)} & (x \neq y \text{ かつ } x, y \text{ が } G'_n \text{上の隣接点のとき}) \\ \frac{1}{2} & (x = y \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \qquad (x, y \in V_n)$$

（$\deg(x)$ は x から出ている辺の本数）で与えられる離散時間 lazy random walk $\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$ を考え、$\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$ の混合時間を $\tau(G'_n)$ とおく。なお、以下では $d = \log 3 / \log 2$ とする。

定理 1 ([3]) $d < s < 2d$ のとき、正の定数 c_1, c_2 が存在して次が成り立つ。

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(c_1 2^{(s-d)n} \le \tau(G'_n) \le n^{c_2} 2^{(s-d)n}\right) = 1.$$

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 上の長距離浸透モデルに対しては、$\tau(G'_n)$ に相当する量が $1 < s < 2$ のとき n^{s-1} のオーダー、$s > 2$ のとき n^2 のオーダーとなり、$s = 2$ の前後で不連続に変化することが [1] で示されている。([2] で証明の一部が修正されている。)一方、Sierpinski gasket 格子上の長距離浸透モデルの場合には、$s > 2d$ のときの $\tau(G'_n)$ の評価はまだ得られていない。

以下では、$\tau(G'_n)$ と深い関係を持つ量であるランダムグラフの等周定数について考える。$\pi = (\pi(x))_{x\in V_n}$ を G'_n 上の lazy random walk $\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$ の定常分布とし、$Q(x,y) = \pi(x)P(x,y)$ $(x, y \in V_n)$ とおく。また、$A, B \subset V_n$ に対して $\pi(A) = \sum_{x\in A}\pi(x)$, $Q(A,B) = \sum_{x\in A}\sum_{y\in B} Q(x,y)$ と書く。

$$\phi^* = \min_{\substack{D\subset V_n \\ 0<\pi(D)\le \frac{1}{2}}} \frac{Q(D, D^c)}{\pi(D)}$$

を等周定数と呼ぶ。

命題 2 (1) $d < s < 2d$ のとき、正の定数 c_3, c_4 が存在して次が成り立つ。

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(n^{-c_3} 2^{(d-s)n} \le \phi^* \le c_4 2^{(d-s)n}\right) = 1.$$

(2) $s \ge 2d$ のとき、正の定数 c_5, c_6 が存在して次が成り立つ。

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(c_5 n^{-1} 3^{-n} \le \phi^* \le c_6 n 3^{-n}\right) = 1.$$

参考文献

[1] Benjamini, I., Berger, N., Yadin, A. Long-range percolation mixing time. *Combin. Probab. Comput.* **17**, 487–494 (2008)

[2] Benjamini, I., Berger, N., Yadin, A. Long-range percolation mixing time. arXiv:math/0703872v2. (2009)

[3] Misumi, J. The mixing time of a random walk on a long-range percolation cluster in pre-Sierpinski gasket. *J. Stat. Phys.* **165**, 153-163 (2016)