余次元 1 のホモロジー生成元に関する パーコレーション

見上　達哉 *

本研究は平岡裕章氏（京都大学高等研究院）との共同研究である．

1　背景

パーコレーション理論とは，ランダムに生じる対象のなすクラスターのふるまいを考察する確率論の一分野である．最も基本的なモデルとして，d 次元正方格子 $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$ の各ボンド（辺）を確率 $p \in [0,1]$ で独立に発生させるボンドパーコレーションモデルがある．$C(0) \subset \mathbb{L}^d$ を発生したボンドからなる部分グラフの連結成分のうち原点を含むものとするとその頂点数 $|C(0)|$ は確率変数となり，$C(0)$ が無限グラフとなる**浸透確率** $\theta^{\mathrm{bond}}(p) = P_p(|C(0)| = \infty)$ および，$\theta^{\mathrm{bond}}(p)$ が 0 より真に大きくなる**臨界確率** $p_c^{\mathrm{bond}}(d) = \inf\{p \in [0,1] : \theta^{\mathrm{bond}}(p) > 0\}$ が定義される．任意の空間次元 $d \geq 2$ に対して $0 < p_c^{\mathrm{bond}}(d) < 1$ であることが容易に示され，$p < p_c^{\mathrm{bond}}$, $p > p_c^{\mathrm{bond}}$ のときの相をそれぞれ亜臨界相，超臨界相と呼ぶ．ボンドパーコレーションモデルの特徴のひとつとして，この臨界確率前後における相転移現象が挙げられ，次のように定式化される．

定理 1.1. $p > p_c^{\mathrm{bond}}$ に対しある正定数 $c > 0$ が存在し，任意の 2 頂点 $x, y \in \mathbb{Z}^d$ に対し

$$P_p(x \overset{\mathrm{bond}}{\longleftrightarrow} y) \geq c. \tag{1}$$

$p < p_c^{\mathrm{bond}}$ に対しある正定数 $\sigma > 0$ が存在し，任意の 2 頂点 $x, y \in \mathbb{Z}^d$ に対し

$$P_p(x \overset{\mathrm{bond}}{\longleftrightarrow} y) \leq e^{-\sigma n}. \tag{2}$$

ここで 2 頂点 $x, y \in \mathbb{Z}^d$ が発生したボンドにより接続される事象を $x \overset{\mathrm{bond}}{\longleftrightarrow} y$ と書いた．定理 1.1 は，接続確率 $P_p(x \overset{\mathrm{bond}}{\longleftrightarrow} y)$ のふるまいが臨界確率の前後で定性的に変化することを述べている．ボンドパーコレーションモデルの詳細については文献 [1] を参照されたい．

パーコレーション理論は，多孔質岩への水の浸透現象などの物理的背景を持つが，近年関連が注目されている新たな物理現象として，高分子の破壊現象が挙げられる．論文 [3] では，高分子化合物に張力を加えたときにできる亀裂が，高分子内部に生じる微小な空隙の連なりによって生成されることを示しており，これは亀裂の生成が空隙のパーコレーションとして記述され得ることを示唆している．

2　ホールパーコレーションモデル

本講演では，この破壊現象を背景にもつ新たなパーコレーションモデルを提案する．このモデルにおいて，高分子内に生じる空隙は，$\mathbb{R}^d$ 内にランダムに生じる図形の $(d-1)$ 次のホモロジー生成元として表される．従来のパーコレーションモデルは主にランダムグラフの枠組みで考察され，頂点の連なりを調べているものが多い．本研究では，この「頂点」を 0 次のホモロジー生成元と捉え，その高次元版として「空洞」に相当する余次元 1 のホモロジー生成元の連なりを考察することを考えた．このモデルを**ホールパーコレーションモデル**と呼ぶ．

*東北大学大学院理学研究科博士課程前期 2 年　E-mail: mikami1642@gmail.com

以降，$d \geq 2$ とする．$\mathbb{R}^d$ 上の余次元 1 の基本方体を**面**と呼ぶ．即ち，面とはある整数 $l \in \mathbb{Z}$ を用いて $I = [l, l+1]$ または $[l, l]$ と書ける区間の d 個の直積であり，その次元が $(d-1)$ であるものとする．$\mathbb{R}^d$ 上の面全体を $\mathcal{K}^d_{d-1}$ とおく．上述のパーコレーションモデルと同様，各面 $Q \in \mathcal{K}^d_{d-1}$ が同確率 $p \in [0,1]$ で独立に発生する確率過程を与える．

面の発生状態 $\omega \in \{0,1\}^{\mathcal{K}^d_{d-1}}$ から定まる $\mathbb{R}^d$ 内の図形 $K(\omega)$ に対し，補集合 $\mathbb{R}^d \setminus K(\omega)$ の各有界連結領域は $K(\omega)$ の $(d-1)$ 次体系数ホモロジー群の生成元と自然に一対一対応する．この有界連結領域を**ホール**と呼ぶ．ω から誘導される**ホールグラフ** $G(\omega)$ を，各ホールを頂点とし，隣接関係を共通の境界面を持つこととして定めたグラフとする．$G(\omega)$ の連結成分 $G_0(\omega)$ を一つ固定し，ボンドパーコレーション理論と同様，浸透確率 $\theta^{\mathrm{hole}}(p) := P_p(|G_0(\omega)| = \infty)$ および臨界確率 $p_c^{\mathrm{hole}} := \inf\{p : \theta^{\mathrm{hole}}(p) > 0\}$ が定義される．

以上の設定のもとで，まず本研究では臨界確率 $p_c^{\mathrm{hole}}(d)$ に関する評価を与えた．

定理 2.1. 任意の空間次元 $d \geq 2$ に対し，

$$0 < p_c^{\mathrm{hole}}(d) \leq 1 - p_c^{\mathrm{bond}}(d).$$

定理 2.1 から，このモデルに対しても亜臨界相，超臨界相が存在することが分かる．さらに本研究では，ボンドパーコレーションモデルの超臨界相における接続確率の評価 (1) の類似を得た．ここで，$(\mathbb{Z}^d)^* = \mathbb{Z}^d + (1/2, \ldots, 1/2)$ を双対格子の頂点集合とし，2 頂点 $x^*, y^* \in (\mathbb{Z}^d)^*$ がホールグラフの同一の連結成分に含まれていることを $x^* \overset{\mathrm{hole}}{\longleftrightarrow} y^*$ と表す．

定理 2.2. $p > p_c^{\mathrm{hole}}$ に対し，ある定数 $c > 0$ が存在し，任意の $x^*, y^* \in (\mathbb{Z}^d)^*$ に対し

$$P_p(x^* \overset{\mathrm{hole}}{\longleftrightarrow} y^*) \geq c$$

が成立する．

本講演は論文 [2] に基づく．

謝辞　本研究は，JST CREST Mathematics 15656429 および JSPS 挑戦的研究（萌芽）17829801 の助成を受けている．

参考文献

[1] Grimmett, G.: Percolation. Springer-Verlag, Berlin (1999)

[2] Hiraoka, Y., Mikami, T.: Percolation on homology generators in codimension one. Preprint https://arxiv.org/abs/arXiv:1809.07490

[3] Ichinomiya, T., Obayashi, I., Hiraoka, Y.: Persistent homology analysis of craze formation. Phys. Rev. E. **95**, 012504 (2017)