CONSERVATIVENESS AND FELLER PROPERTY OF DIFFUSION PROCESSES ON RIEMANNIAN MANIFOLDS WITH m-BAKRY-ÉMERY RICCI TENSOR FOR $m \le 1$

桑江一洋 (K. Kuwae) 福岡大学理学部

1. Laplacian の比較定理

この講演では中国科学院の Xiang-Dong Li 氏との Laplacian の比較定理に関する共同研究 [5] に基づき, 氏と北京師範大学の Songzi Li 氏との共同研究 [6] について報告する．(M,g) を完備で滑らかな境界のないリーマン多様体とする。$\phi \in C^2(M)$ を固定する。$C_0^\infty(M)$ 上の作用素 L を $L := \Delta - \langle \nabla\phi, \nabla\cdot\rangle$ で定めると，これは $\mu := e^{-\phi}\mathrm{vol}_g$ について対称になる。すなわち $\int_M (-Lf)g\mathrm{d}\mu = \int_M \langle \nabla f, \nabla g\rangle \mathrm{d}\mu =: \mathcal{E}(f,g)$ が $f,g \in C_0^\infty(M)$ で成立する。L を Witten Laplacian あるいは重み付き Laplacian と呼ぶ。ディリクレ形式 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ を $(\mathcal{E}, C_0^\infty(M))$ の $L^2(M;\mu)$ 上の最小閉拡張とし，$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ に対応する拡散過程を $\mathbf{X} = (\Omega, X_t, \mathbf{P}_x)$ とおく。$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ の $L^2(M;\mu)$-半群は連続な熱核を許容することが知られている ($\phi \in C^\infty(M)$ のときは [3, 7.5] を参照)。$m \in]-\infty, +\infty]$ に対して m-Bakry-Émery リッチテンソル $\mathrm{Ric}_{m,n}(L)$ を

$$\mathrm{Ric}_{m,n}(L)(x) := \mathrm{Ric}(x) + \mathrm{Hess}\,\phi(x) - \frac{\nabla\phi(x)\otimes\nabla\phi(x)}{m-n}$$

で定める。M 上の関数 K に対して $\mathrm{Ric}_{m,n}(L)(x) \ge K(x)$, $x \in M$ が成立するとき曲率次元条件 $\mathrm{CD}(K,m)$ が成立すると呼ぶ。$m = n$ のときは ϕ は定数と規約する。この場合は $\mathrm{Ric}_{m,n}(L)(x) = \mathrm{Ric}(x)$ となる。$m \ge n$ で K が定数なら (M, d_g, μ) の $\mathsf{RCD}(K,m)$-条件と同値になる。本講演では $m \le 1$ の場合に重み付き Laplacian L の比較定理 ([5]) に基づいて $\mathbf{X}$ の保存性と Feller 性への変形されたやや強い判定条件を与える。$r_p(x) := d_g(x,p)$ を距離関数とする。以下の比較定理は $m = 1$ で κ が定数の場合に [9] で最初に証明された。

定理 1.1 (Laplacian の比較定理 [5], cf. [9])**.** $x,p \in M$, $m \le 1$ とする。$\mathrm{Ric}_{m,n}(L)(x) \ge (n-m)\kappa(s_p(x))e^{-\frac{4\phi(x)}{n-m}}$ なら, $Lr_p(x) \le (n-m)\mathsf{cot}_\kappa(s_p(x))e^{-\frac{2\phi(x)}{n-m}}$ が $s_p(x) < \delta_\kappa$ で成立する。ここで κ は $[0,+\infty[$ 上の連続関数で，$s_p(x)$ は

$$s_p(x) = \inf\left\{ \int_0^{r_p(x)} e^{-\frac{2\phi(\gamma_t)}{n-m}}\mathrm{d}t \;\middle|\; \gamma\text{は単位速度測地線で}\gamma_0 = p, \gamma_{r_p(x)} = x \right\}$$

で与えられる。cot_κ は初期条件 $\lim_{s\to 0} s\,\mathsf{cot}_\kappa(s) = 1$ をみたす Riccati 方程式

$$-\frac{\mathrm{d}\mathsf{cot}_\kappa}{\mathrm{d}s}(s) = \kappa(s) + \mathsf{cot}_\kappa(s)^2, \tag{1.1}$$

の $[0,\delta_\kappa[$ 上の解で δ_κ はその爆発時刻である。$\kappa \le 0$ なら $\delta_\kappa = +\infty$ となる。$\delta_\kappa < \infty$ なら末期条件 $\lim_{s\to\delta_\kappa}(\delta_\kappa - s)\,\mathsf{cot}_\kappa(s) = 1$ も満たされる。κ が定数のときは $\kappa \le 0$ の場合も込めて $\mathsf{cot}_\kappa(s) = \sqrt{\kappa}\cos(\sqrt{\kappa}s)/\sin(\sqrt{\kappa}s)$, $\delta_\kappa = \pi/\sqrt{\kappa_+}$ となる。

2. 主結果

$\phi_p(r) := \inf_{B_r(p)} \phi$ とする。K を $[0, +\infty[$ 上の非負連続な非減少関数で以下の $(\mathbf{K})$ という条件を満たすとする:

$$(\mathbf{K}): \qquad \int_{r_o}^{\infty} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\mathsf{K}\left(e^{-\frac{2\phi_p(r)}{n-m}} r\right) e^{-\frac{2\phi_p(r)}{n-m}}}} = +\infty \quad \text{for some} \quad r_o > 0.$$

条件 $(\mathbf{K})$ は $p \in M$ には依存しない。

定理 2.1 ($\mathbf{X}$ の保存性)**.** $p \in M$ を固定する。条件 $(\mathbf{K})$ を仮定し

$$\mathrm{Ric}_{m,n}(L)(x) \geq -\mathsf{K}(s_p(x)) e^{-\frac{4\phi(x)}{n-m}} \quad \textit{for any } x \in M \tag{2.1}$$

が $m \in]-\infty, 1]$ で成立するとする。このとき $\mathbf{X}$ は保存的である。

定理 2.2 ($\mathbf{X}$ の Feller 性)**.** 条件 $(\mathbf{K})$ を仮定し

$$\mathrm{Ric}_{m,n}(L)(z) \geq -\mathsf{K}(s_q(z)) e^{-\frac{4\phi(z)}{n-m}} \quad \textit{for any} \quad z, q \in M \tag{2.2}$$

が $m \in]-\infty, 1]$ で成立するとする。このとき $\mathbf{X}$ は *Feller* 性をもつ。

定理 2.1の証明は Grigor'yan [2] の保存性の判定条件に帰着される。また定理 2.2の証明は Azencott [1] の Feller 性の判定条件に帰着される ([4] に通常の Laplacian の場合での証明がある)。$m \geq n$ の場合の Laplacian の比較定理は $\mathrm{Ric}_{m,n}(L)(x) \geq (m-1)\kappa(r_p(x))$ なら $Lr_p(x) \leq (m-1)\mathsf{cot}_\kappa(r_p(x))$, $r_p(x) < \delta_\kappa$ の形のため, $\mathbf{X}$ の保存性や Feller 性は $(\mathbf{K})$ よりも弱い条件である

$$\int_{r_o}^{\infty} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\mathsf{K}(r)}} = +\infty \quad \text{for some} \quad r_o > 0$$

で成立することが知られている ([8, Theorems 1.4 and 1.5])

References

[1] R. Azencott, *Behavior of diffusion semi-groups at infinity*, Bull. Soc. Math. France **102** (1974), 193–240.

[2] A. Grigor'yan, *On stochastically complete manifolds*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR **290** (1986), 534–537.

[3] A. Grigor'yan, *Heat kernel and analysis on manifolds*, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, **47**. American Mathematical Society, Providence, RI; International Press, Boston, MA, 2009.

[4] E. P. Hsu, *Stochastic analysis on manifolds*, Graduate Studies in Mathematics, **38**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[5] K. Kuwae and X.-D. Li, *Laplacian comparison theorem on Riemannian manifolds with* $\mathrm{CD}(K, m)$*-condition for* $m \leq 1$, preprint, 2018.

[6] K. Kuwae, S.-Z. Li and X.-D. Li, *Conservativeness and Feller property of diffusion processes on Riemannian manifolds with m-Bakry-Émery Ricci tensor for* $m \leq 1$, 2018, preprint.

[7] K. Kuwae, S.-Z. Li and X.-D. Li, *Liouville theorems and Harnack inequalities on Riemannian manifolds with* $\mathrm{CD}(K, m)$*-condition for* $m < 1$, 2018, in prepration.

[8] X.-D. Li, *Liouville theorems for symmetric diffusion operators on complete Riemannian manifolds*, J. Math. Pures Appl. (9) **84** (2005), no. 10, 1295–1361.

[9] W. Wylie and D. Yeroshkin, *On the geometry of Riemannian manifolds with density*, preprint, 2016.