確率幾何的表現を用いた量子 Ising 模型の平均場臨界現象の解析

上島芳倫 *
共同研究者：半田悟氏（北海道大学），坂井哲氏（北海道大学）

鉄 (Fe) は常温で強い磁場を印加すると磁石になるが，770 °C でその性質が失われる．このような強磁性体の相転移を記述するモデルの一つに Ising 模型がある．古典 Ising 模型は，d 次元格子 $\mathbb{Z}^d$ 上のスピン配置 $\sigma_\cdot : \mathbb{Z}^d \to \{-1, +1\}$ が確率的に実現されるとするモデルである．この模型に対する相転移・臨界現象については [4] に詳しい．

一方で，量子力学的には，スピンは作用素によって表されるべき対象である．具体的には，古典系のスピン配置 $\{\sigma_x\}_{x\in\mathbb{Z}^d}$ を Pauli 行列で置き換え，横磁場を印加する．このように扱うことで，例えば，絶対零度でも横磁場を変化させるによって相転移が起きるなど，古典系には無かった興味深い性質が現れる．ところで，量子 Ising 模型は格子空間に連続な時間軸を加えた "時空間の Ising 模型"（スピンは古典的）と対応することが知られており，その時空間上の確率幾何的表現を用いて種々の相関不等式が得られている [2, 3].

講演者らは特に，量子効果を加えたとき，平均場的な振る舞いが古典系からどの程度ずれるかということに関心がある．量子 Ising 模型における平均場臨界現象の数学的な解析は Bjönberg [1] によって行われているが，その論文では温度パラメータを固定した状況で相互作用係数や横磁場を変化させたときの応答について示されている．古典系からのずれという観点からは，相互作用係数や横磁場を固定した状況で温度を変化させたときの応答を調べたい．

本講演ではこの温度変化に対する応答という問題について現在までに得られた結果を紹介する．それに際しては，d 次元量子 Ising 模型は極限の意味で $d+1$ 次元古典 Ising 模型と等価であること [5] に基づき，時空間ではなく古典系での確率幾何的表現のみを用いた．モデルの詳しい定義や定理の内容については，講演の中で述べる．

* 北海道大学大学院理学院数学専攻 E-mail: kamijima@math.sci.hokudai.ac.jp

参考文献

[1] J.E. Björnberg. Infrared bound and mean-field behaviour in the quantum Ising model. *Commun. Math. Phys.* **323** (2013): 329–366.

[2] J.E. Björnberg and G.R. Grimmett. The phase transition of the quantum Ising model is sharp. *J. Stat. Phys.* **136** (2009): 231–273.

[3] N. Crawford, D. Ioffe. Random current representation for transverse field Ising model. *Commun. Math. Phys.* **296** (2010): 447–474.

[4] 田崎晴明，原隆『相転移と臨界現象の数理』（共立出版株式会社，2015 年）

[5] M. Suzuki. Relationship between d-Dimensional Quantal Spin Systems and $(d+1)$-Dimensional Ising Systems: Equivalence, Critical Exponents and Systematic Approximants of the Partition Function and Spin Correlations. *PTP.* **56** (1976): 1454–1469.

RECOVERING MODELLED DISTRIBUTIONS FROM PARACONTROLLED CALCULUS

MASATO HOSHINO

Many singular SPDEs have motivations from statistical physics, quantum field theory, etc., but they are sometimes ill-posed without "renormalizations". The theory of *paracontrolled calculus* by Gubinelli, Imkeller and Perkowski made it possible to show the local well-posedness results for such renormalized SPDEs. Compared with the famous theory of *regularity structures* by Hairer, the PC theory has an advantage in showing detailed properties (global well-posedness, ergodicity, etc.) but it is not algebraically sophisticated. Our ultimate goal is to show the equivalence of RS and PC and construct a new theory which has both advantages of RS and PC.

One of the main differences between the two theories is in the definition of solutions. In PC, solutions are written by using the Bony's paraproduct. In RS, solutions are described based on local estimates. Therefore in order to get the relationship between these concepts, we need local estimates of Bony's paraproduct.

This talk consists of the following three steps.

(1) (Analytical step) We consider local behaviors of the nonlocal operators

$$(\dots((f^1 \otimes f^2) \otimes f^3) \dots \otimes f^{n-1}) \otimes f^n.$$

For the simplicity, we consider slightly simpler operators.

(2) (Algebraic step) We construct the Hopf algebra which represent the structure appearing in (1).

(3) Some applications: multiplicative SDEs with singular noises, iterated commutators, paralinearization, etc.

This talk is based on a joint work with Ismaël Bailleul.

Faculty of Mathematics, Kyushu University
E-mail address: hoshino@math.kyushu-u.ac.jp

Nelson 拡散過程と非線形 Schrödinger 方程式（ Nelson Diffusions and Nonlinear Schrödinger equations）

名和 範人（Hayato NAWA），明治大学 理工学部 数学科

1. 非線形 Schrödinger 方程式

次の擬共型不変な非線形 Schrödinger 方程式の初期値問題について考える：

$$\begin{cases} 2i\dfrac{\partial\psi}{\partial t} + \triangle\psi + |\psi|^{4/d}\psi = 0, \quad (x,t)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+, \\ \psi(0) = \psi_0 \in H^1(\mathbb{R}^d). \end{cases}$$

ここで，$H^1(\mathbb{R}^d)$ は 1 階の超関数微分までが自乗可積分であるような関数のクラス，通常の Sobolev 空間，を表す．この初期値問題の局所適切性はよく知られた古典的な事実で，$\|\nabla\psi_0\|$ のみに依存する最大延長時間 $T_{\max}\in(0,\infty]$ があって，$\psi\in C([0,T_{\max});H^1(\mathbb{R}^d))$ なる一意解を持ち，次の「ビーム強度 (または粒子数)」,「ハミルトニアン (またはエネルギー)」と呼ばれる量が保存則する [7]:

$$\|\psi(t)\| := \left(\int_{\mathbb{R}^d}|\psi(x,t)|^2dx\right)^{1/2} = \|\psi_0\|, \qquad \mathcal{H}(\psi(t)) := \|\nabla\psi(t)\|^2 - \frac{2}{2+\frac{4}{d}}\|\psi(t)\|_{2+\frac{4}{d}}^{2+\frac{4}{d}} = \mathcal{H}(\psi_0).$$

上式では次の記号を用いた：関数 f に対して $\|f\|_p := \left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|^pdx\right)^{1/p}$.

我々の初期値問題は様々な解を持つが，特に興味があるのが爆発解である．爆発 (blowup) とは，

$$0<T_{\max}<\infty, \qquad \lim_{t\to T_{\max}}\|\nabla\psi(t)\| = \infty$$

となることを言う．擬共型不変な非線形 Schrödinger 方程式は $d=2$ のとき，非線形媒質中伝播するレーザービームの自己集束モデル（Kerr 効果）として現れ（例えば [2]），解の爆発はビームの集束を表現していると考えられる（この場合の時間軸は実際の時間ではなく，ビームの進行方向に平行な空間の第 3 軸となっている）．我々は，この爆発解の爆発スピードに興味がある．

2. Nelson 拡散過程

量子力学の基礎方程式である Schrödinger 方程式の初期値問題の解に対して，量子力学と同じ予言を与える確率過程（Nelson 拡散過程 [5]）を構成することができた [1]．非線形 Schrödinger 方程式に対しても，同様な確率過程を構成できる: 経路の空間 $C\big([0,T_{\max}),\mathbb{R}^d\big)$ 上に "確率変数"

$$\begin{array}{cccccc} X_t: & C\big([0,T_{\max}),\mathbb{R}^d\big) & \longrightarrow & \mathbb{R}^d & & \\ & \Cup & & \Cup & & \\ & \gamma & \longmapsto & \gamma(t) & =: & X_t(\gamma). \end{array}$$

を導入すると，$C\big([0,T_{\max}),\mathbb{R}^d\big)$ の上に

$$P[X_t\in dx] = \frac{|\psi(x,t)|^2dx}{\|\psi_0\|^2}.$$

なる確率測度 P が存在して，P は，次の汎関数 B_t が Brown 運動になるようなものとして特徴付けられる：

$$B_t \overset{def}{:=} X_t - X_0 - \int_0^t b(X_\tau,\tau)d\tau.$$

ドリフト項 b は Schrödinger 方程式 の解から，$\psi\neq 0$ のとき $b := (\Im+\Re)\dfrac{\nabla\psi}{\psi}$，$\psi=0$ のときは $b:=0$ と定義されている．

3. Brown 運動の重対数法則と爆発スピード

我々の爆発解は，$\{|\psi(x,t)|^2 dx\}_{0<t<T\max}$ が tight であれば，

$$|\psi(x,t)|^2 dx \rightharpoonup \sum_{j=1}^{N} A_j \delta_{a^j}(dx) + \mu(dx) \qquad \text{as} \qquad t \to T_{\max}$$

と振る舞うことがわかっている [4]．ここで，A_j $(j=1,2,\ldots,N)$ は，ある "閾値" $\mathcal{N}_0$ より大きな正数，$\delta_{a^j}(dx)$ は $\mathbb{R}^d$ 内の点 a^j に台を持つ Dirac 測度，μ は Lebesgue 測度に対して絶対連続であると予想されているが，特殊な場合を除いて，よく分かってはいない．"閾値" $\mathcal{N}_0$ より，少しだけ大きな L^2 ノルムを持つ爆発解に対しては（$d=1,2,3,4$），次の評価が知られている [6, 3]：

$$\|\nabla\psi(t)\| \asymp \sqrt{\frac{\ln\ln(T_{\max}-t)^{-1}}{T_{\max}-t}}.$$

この振る舞いを，「業界」では loglog law と呼んでいる [7]．ここでは，この問題を少し別の角度から見てみることにする．上のような極限形状を持つことなどを利用して，爆発スピードを Brown 運動を用いて評価することができる．次を仮定する：

$$\int_0^{T_{\max}} \|\nabla\psi(t)\| dt < \infty, \qquad \lim_{t\to T_{\max}} \|\nabla\psi(t)\| \int_t^{T_{\max}} \|\nabla\psi(\tau)\| d\tau = \infty.$$

Theorem 1. 十分大きな $M>0$ が存在して，

$$P\left[\, |\, B_{T_{\max}} - B_t \,| \le M \int_t^{T_{\max}} \|\nabla\psi(\tau)\| d\tau, \;\; e.f. \,\right] = 1$$

が成り立つ．

上からの評価には，さらに「技術的」な仮定が必要ではあるが（詳細は講演時に），次の評価を得ることができる：十分小さな $\eta>0$ に対して

$$P\left[\, |\, B_{T_{\max}} - B_t \,| \ge \eta \int_t^{T_{\max}} \|\nabla\psi(\tau)\| d\tau, \;\; i.o. \,\right] = 1$$

References

[1] Carlen, E.: Conservative diffusions, Commun. Math. Phys. **94** 293–315 (1983).

[2] Gadi, F.: "The Nonlinear Schrödinger equation: Singular Solutions and Optical Collaps", Applied Mathematical Sciences 192, Springer, Switzerland, 2015.

[3] Merle, F. and Raphael, P.: *Blow-up dynamics and upper bound on the blow up rate for critical nonlinear Schrödinger equation*, Ann. MAth. **16**, pp. 157–222 (2005)

[4] Nawa, H.: *Asymptotic and limiting profiles of blow-up solutions of the nonlinear Schrödinger equation with critical power*, Commun. Pure and Apllied Math. **52** (1999), pp. 193–270 (1999)

[5] Nelson, E.: "Quantum fluctuations", Princeton Unuversity Press, Princeton, NJ, 1984.

[6] Perelman, G.: *On the blow-up phenomenon for the critical nonlinear Schrödinger equation in 1 D*, Ann. Henri Poincare **2**, pp. 605–673 (2001)

[7] Sulem, C. and Sulem, P.-L.: "Nonlinear Schrödinger equation: Self-focusing and wave collaps", Applied Mathematical Sciences 139, Springer-verlag, New York, 1999.

余次元 1 のホモロジー生成元に関する
パーコレーション

見上　達哉 *

本研究は平岡裕章氏（京都大学高等研究院）との共同研究である．

1　背景

パーコレーション理論とは，ランダムに生じる対象のなすクラスターのふるまいを考察する確率論の一分野である．最も基本的なモデルとして，d 次元正方格子 $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$ の各ボンド（辺）を確率 $p \in [0,1]$ で独立に発生させるボンドパーコレーションモデルがある．$C(0) \subset \mathbb{L}^d$ を発生したボンドからなる部分グラフの連結成分のうち原点を含むものとするとその頂点数 $|C(0)|$ は確率変数となり，$C(0)$ が無限グラフとなる**浸透確率** $\theta^{\mathrm{bond}}(p) = P_p(|C(0)| = \infty)$ および，$\theta^{\mathrm{bond}}(p)$ が 0 より真に大きくなる**臨界確率** $p_c^{\mathrm{bond}}(d) = \inf\{p \in [0,1] : \theta^{\mathrm{bond}}(p) > 0\}$ が定義される．任意の空間次元 $d \geq 2$ に対して $0 < p_c^{\mathrm{bond}}(d) < 1$ であることが容易に示され，$p < p_c^{\mathrm{bond}}$, $p > p_c^{\mathrm{bond}}$ のときの相をそれぞれ亜臨界相，超臨界相と呼ぶ．ボンドパーコレーションモデルの特徴のひとつとして，この臨界確率前後における相転移現象が挙げられ，次のように定式化される．

定理 1.1. $p > p_c^{\mathrm{bond}}$ に対しある正定数 $c > 0$ が存在し，任意の 2 頂点 $x, y \in \mathbb{Z}^d$ に対し

$$P_p(x \overset{\mathrm{bond}}{\longleftrightarrow} y) \geq c. \tag{1}$$

$p < p_c^{\mathrm{bond}}$ に対しある正定数 $\sigma > 0$ が存在し，任意の 2 頂点 $x, y \in \mathbb{Z}^d$ に対し

$$P_p(x \overset{\mathrm{bond}}{\longleftrightarrow} y) \leq e^{-\sigma n}. \tag{2}$$

ここで 2 頂点 $x, y \in \mathbb{Z}^d$ が発生したボンドにより接続される事象を $x \overset{\mathrm{bond}}{\longleftrightarrow} y$ と書いた．定理 1.1 は，接続確率 $P_p(x \overset{\mathrm{bond}}{\longleftrightarrow} y)$ のふるまいが臨界確率の前後で定性的に変化することを述べている．ボンドパーコレーションモデルの詳細については文献 [1] を参照されたい．

パーコレーション理論は，多孔質岩への水の浸透現象などの物理的背景を持つが，近年関連が注目されている新たな物理現象として，高分子の破壊現象が挙げられる．論文 [3] では，高分子化合物に張力を加えたときにできる亀裂が，高分子内部に生じる微小な空隙の連なりによって生成されることを示しており，これは亀裂の生成が空隙のパーコレーションとして記述され得ることを示唆している．

2　ホールパーコレーションモデル

本講演では，この破壊現象を背景にもつ新たなパーコレーションモデルを提案する．このモデルにおいて，高分子内に生じる空隙は，$\mathbb{R}^d$ 内にランダムに生じる図形の $(d-1)$ 次のホモロジー生成元として表される．従来のパーコレーションモデルは主にランダムグラフの枠組みで考察され，頂点の連なりを調べているものが多い．本研究では，この「頂点」を 0 次のホモロジー生成元と捉え，その高次元版として「空洞」に相当する余次元 1 のホモロジー生成元の連なりを考察することを考えた．このモデルを**ホールパーコレーションモデル**と呼ぶ．

* 東北大学大学院理学研究科博士課程前期 2 年　E-mail: mikami1642@gmail.com

以降，$d \geq 2$ とする．$\mathbb{R}^d$ 上の余次元 1 の基本方体を**面**と呼ぶ．即ち，面とはある整数 $l \in \mathbb{Z}$ を用いて $I = [l, l+1]$ または $[l, l]$ と書ける区間の d 個の直積であり，その次元が $(d-1)$ であるものとする．$\mathbb{R}^d$ 上の面全体を $\mathcal{K}_{d-1}^d$ とおく．上述のパーコレーションモデルと同様，各面 $Q \in \mathcal{K}_{d-1}^d$ が同確率 $p \in [0,1]$ で独立に発生する確率過程を与える．

面の発生状態 $\omega \in \{0,1\}^{\mathcal{K}_{d-1}^d}$ から定まる $\mathbb{R}^d$ 内の図形 $K(\omega)$ に対し，補集合 $\mathbb{R}^d \setminus K(\omega)$ の各有界連結領域は $K(\omega)$ の $(d-1)$ 次体系数ホモロジー群の生成元と自然に一対一対応する．この有界連結領域を**ホール**と呼ぶ．ω から誘導される**ホールグラフ** $G(\omega)$ を，各ホールを頂点とし，隣接関係を共通の境界面を持つこととして定めたグラフとする．$G(\omega)$ の連結成分 $G_0(\omega)$ を一つ固定し，ボンドパーコレーション理論と同様，浸透確率 $\theta^{\mathrm{hole}}(p) := P_p(|G_0(\omega)| = \infty)$ および臨界確率 $p_c^{\mathrm{hole}} := \inf\{p : \theta^{\mathrm{hole}}(p) > 0\}$ が定義される．

以上の設定のもとで，まず本研究では臨界確率 $p_c^{\mathrm{hole}}(d)$ に関する評価を与えた．

定理 2.1. 任意の空間次元 $d \geq 2$ に対し，

$$0 < p_c^{\mathrm{hole}}(d) \leq 1 - p_c^{\mathrm{bond}}(d).$$

定理 2.1 から，このモデルに対しても亜臨界相，超臨界相が存在することが分かる．さらに本研究では，ボンドパーコレーションモデルの超臨界相における接続確率の評価 (1) の類似を得た．ここで，$(\mathbb{Z}^d)^* = \mathbb{Z}^d + (1/2, \ldots, 1/2)$ を双対格子の頂点集合とし，2 頂点 $x^*, y^* \in (\mathbb{Z}^d)^*$ がホールグラフの同一の連結成分に含まれていることを $x^* \xleftrightarrow{\mathrm{hole}} y^*$ と表す．

定理 2.2. $p > p_c^{\mathrm{hole}}$ に対し，ある定数 $c > 0$ が存在し，任意の $x^*, y^* \in (\mathbb{Z}^d)^*$ に対し

$$P_p(x^* \xleftrightarrow{\mathrm{hole}} y^*) \geq c$$

が成立する．

本講演は論文 [2] に基づく．

謝辞　本研究は，JST CREST Mathematics 15656429 および JSPS 挑戦的研究（萌芽）17829801 の助成を受けている．

参考文献

[1] Grimmett, G.: Percolation. Springer-Verlag, Berlin (1999)

[2] Hiraoka, Y., Mikami, T.: Percolation on homology generators in codimension one. Preprint https://arxiv.org/abs/arXiv:1809.07490

[3] Ichinomiya, T., Obayashi, I., Hiraoka, Y.: Persistent homology analysis of craze formation. Phys. Rev. E. **95**, 012504 (2017)

Superdiffusion of energy in harmonic chains with noises and long-range interactions

須田 颯 (東京大学大学院数理科学研究科)

2018 年 12 月 20 日

本講演では, 確率的な摂動を含む長距離相関調和振動子鎖モデル $\{(p_x(t), q_x(t)) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}; x \in \mathbb{Z}, t \geq 0\}$,

$$\begin{cases} dq_x(t) = p_x(t)dt \\ dp_x(t) = -\sum_{z\in\mathbb{Z}} \alpha(x-z) q_z(t)dt + \sqrt{\gamma}(noises) \end{cases}$$

におけるエネルギー分布の時空スケール極限を考察する. すなわち, スケールパラメータを $0 < \epsilon < 1$ とした時,

$$\lim_{\epsilon\to 0+} \epsilon \sum_{x\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}[e_x(\frac{t}{f(\epsilon)})]\delta_{\epsilon x} = \mathbf{e}(y,t)dy$$

なる非自明な極限 $\mathbf{e}(y,t)dy$ が得られるような時空スケーリング比 $f(\epsilon)$, 及び $\mathbf{e}(y,t)$ の満たす偏微分方程式を求める. ここで, $p_x(t), q_x(t), e_x(t) := \frac{1}{2}|p_x(t)|^2 - \frac{1}{4}\sum_{z\in\mathbb{Z}, z\neq x} \alpha(x-z)|q_x(t) - q_z(t)|^2$ は x 番目の振動子の時刻 t における運動量, 位置, エネルギーを表す. $\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ は振動子間の相互作用ポテンシャルであり, $\sum_x \alpha(x) = 0, \quad \alpha(x) = \alpha(-x), x \in \mathbb{Z}, \quad \alpha(x) \leq 0, x \neq 0$ を満たす. $\gamma > 0$ は確率的摂動の強度である.

[1, 2] [3] では, $|\alpha(x)| \leq e^{-C|x|}, x \in \mathbb{Z}$ なる $C > 0$ が存在し, $\gamma = \epsilon^s\gamma_0, 0 \leq s \leq 1, \gamma_0 > 0$ として摂動もスケールされている場合, $f(\epsilon) = \epsilon^{\frac{3-s}{2}}$, $\partial_t \mathbf{e}(y,t) = -C_{\gamma_0,\alpha}(-\Delta)^{\frac{3}{4}}\mathbf{e}(y,t)$ であることが示されている. $C_{\gamma_0,\alpha} > 0$ は γ_0, α によって決まる定数である. これは相互作用ポテンシャル α が指数的減衰をする場合, 本質的に nearest neighbor interaction $(\alpha(0) = 2, \alpha(\pm 1) = -1, \alpha(x) = 0, |x| \geq 2)$ の場合と同じエネルギー分布の挙動が観測されることを意味しており, 長距離相関が巨視的に影響していない.

講演者は, $\alpha(x) = -|x|^{-\theta}, \theta > 2$, $\gamma = \epsilon^s\gamma_0, 0 \leq s \leq 1, \gamma_0 > 0$ の場合,

$$\begin{aligned} 2 < \theta < 3 \quad &\longrightarrow \quad f(\epsilon) = \epsilon^{\frac{6-s(\theta-1)}{7-\theta}}, \quad \partial_t \mathbf{e}(y,t) = -C_{\gamma_0,\theta}(-\Delta)^{\frac{3}{7-\theta}}\mathbf{e}(y,t), \\ \theta > 3 \quad &\longrightarrow \quad f(\epsilon) = \epsilon^{\frac{3-s}{2}}, \quad \partial_t \mathbf{e}(y,t) = -C_{\gamma_0,\theta}(-\Delta)^{\frac{3}{4}}\mathbf{e}(y,t), \\ \theta = 3 \quad &\longrightarrow \quad \epsilon^{\frac{3-s}{2}} < f(\epsilon) < \epsilon^{\frac{3-s}{2}-\delta}, \forall\delta > 0, \quad \partial_t \mathbf{e}(y,t) = -C_{\gamma_0,\theta}(-\Delta)^{\frac{3}{4}}\mathbf{e}(y,t) \end{aligned}$$

であることを示した. これから $2 < \theta < 3$ の場合は長距離相関が巨視的にも影響しており, $\theta = 3$ の場合も時間スケーリングがわずかに速くなることが分かる. $2 < \theta \leq 3$ の時は特に, sound speed と呼ばれる量 $\frac{\widehat{\alpha}'(k)}{\sqrt{\widehat{\alpha}(k)}}, \quad \widehat{\alpha}(k) := \sum_{x\in\mathbb{Z}} \alpha(x)e^{-2\pi kx}, k \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ が $k \to 0$ で発散する. 上記の指数的減衰や $\theta > 3$ の場合, sound speed は常に有界であり, この顕著な違いがエネルギー分布の挙動に影響している.

参考文献

[1] G. Basile, S. Olla, H. Spohn : *Energy transport in stochastically perturbed lattice dynamics.* Arch. Ration. Mech. **195**, 171–203 (2009)

[2] M. Jara, T. Komorowski, S. Olla : *A limit theorem for an additive functionals of Markov chains*. Ann. Appl. Probab. **19**, 2270–2230 (2009)

[3] M. Jara, T. Komorowski, S. Olla : *Superdiffusion of Energy in a Chain of Harmonic Oscillators with Noise*. Commun. Math. Phys. **339**, 407–453 (2015)

Eigenvalue processes of Ginibre ensemble and their properties

藪奥 哲史 (千葉大学大学院理学研究院)

1　導入

Ginibre Ensemble (GE) の時間発展による固有値過程について議論する. GE はランダム行列のモデルであり, 行列成分が独立な複素正規分布に従う非対称行列である. GE の固有値は複素数値で, その経験分布は複素単位円板上の一様分布に確率 1 で収束する [1]. 近年この GE に対する時間発展モデルが研究されつつあるが ([2],[3]), このモデルは非正規行列であるため, 従来のエルミート行列に対する手法が適用できない. そこで本講演では陰関数定理によってこの固有値過程の確率微分方程式を具体的に導出し, さらにその固有ベクトルが固有値過程の挙動に影響を与えることを示す. このことはエルミート行列の固有値の時間発展モデルである Dyson ブラウン運動の場合とは大きく異なる.

2　ランダム行列の時間発展モデル

まず正規行列の, 特にエルミート行列の固有値過程である Dyson ブラウン運動を述べる. N 次エルミート行列値確率過程 $H(t) = (h_{ij}(t))_{1\le i,j\le N}$ を次のように定める:

$$h_{ij}(t) := \begin{cases} B_{ii}(t) & i = j \\ \frac{B^R_{ij}(t)+\sqrt{-1}B^I_{ij}(t)}{\sqrt{2}} & i < j \\ \overline{h_{ji}(t)} & i > j \end{cases} ,\ t > 0$$

ここで $B_{ii}, B^R_{ij}, B^I_{ij} (i < j)$ は独立な 1 次元標準ブラウン運動である.
$H(t)$ は N 個の実固有値 $\lambda_1(t) \ge \ldots \ge\ \lambda_N(t)$ をもち, この固有値過程は 1 次元非衝突ブラウン運動と解釈できることが知られている.

Theorem (Dyson 1962 [4])**.**
$H(t)$ の実固有値過程 $\boldsymbol{\lambda}(t) = (\lambda_1(t), \cdots, \lambda_N(t))$ は次の確率微分方程式を満たす:

$$d\lambda_i(t) = dB'_i(t) + \sum_{j(\neq i)} \frac{1}{\lambda_i(t) - \lambda_j(t)} dt\ ,\quad i = 1, \cdots, N$$

ここで $B'_1, \cdots, B'_N$ は独立な 1 次元標準ブラウン運動である.

Dyson ブラウン運動では, 他の固有値との相互作用を表す差の逆数の和がドリフト項に現れる.
次に GE の時間発展モデルとして N 次非対称, 非正規行列値確率過程 $G(t) = (G_{ij}(t))_{1\le i,j\le N}$ を次のように定める:

$$G_{kl}(t) = B_{kl}(t) := B^R_{kl}(t) + \sqrt{-1}B^I_{kl}(t),\quad 1 \le k, l \le N,\quad t > 0$$

ここで $B^R_{kl}, B^I_{kl},\ 1 \le k, l \le N$ は独立な 1 次元標準ブラウン運動であり, B_{kl} は複素ブラウン運動である. $G(t)$ は N 個の複素固有値をもつ. このとき陰関数定理と伊藤の公式によって次の結果を得る.

Theorem 1 (Y)**.**
$G(t)$ の複素固有値過程 $\boldsymbol{\lambda}(t) = (\lambda_1(t), \cdots, \lambda_N(t))$ は次の確率微分方程式を満たす:

$$d\lambda_i(t) = \sum_{1\le k,l\le N} \frac{-det\left((\lambda_i(t)I_N - G(t))_{k|l}\right)}{\prod_{j(\neq i)}\Big(\lambda_i(t) - \lambda_j(t)\Big)} dB_{kl}(t), \quad i = 1, \cdots, N$$

ここで I_N は単位行列で, 正方行列 A に対して $A_{k|l}$ は A から k 行 l 列を取り除いて得られる小行列である.

この結果から GE の固有値過程はマルチンゲールであり, 他の固有値との相互作用を表す差積がマルチンゲール項に現れることがわかる.
さらに Bourgade, Dubach [3] の結果を用いると, 相互変分について

$$d\langle \lambda_i, \lambda_j\rangle_t = 0, \quad d\langle \lambda_i, \overline{\lambda_j}\rangle_t = 2\mathcal{O}_{ij}(t)dt.$$

が成り立つ. ここで $\mathcal{O}_{ij}(t)$ は固有ベクトルの Overlap と呼ばれ, 右固有ベクトル $R_j(t) \in \mathbb{C}^N$ と左固有ベクトル $L_j(t) \in \mathbb{C}^N$ によって

$$\mathcal{O}_{ij}(t) := \Big(R_j(t)^* R_i(t)\Big)\Big(L_j(t)^* L_i(t)\Big)$$

で定義される量である. 彼らは $G(t)$ を正則行列によって対角化することで, 固有値過程の相互変分が固有ベクトルの内積で記述できることを示した. この Overlap を具体的に表すと次のようになる.

Proposition 2 (Y)**.**

$$\mathcal{O}_{ii}(t) = \frac{\sum_{k=1}^N det\Big(\big((\lambda_i(t)I_N - G(t))(\lambda_i(t)I_N - G(t))^*\big)_{k|k}\Big)}{\prod_{i(\neq p)} |\lambda_i(t) - \lambda_p(t)|^2}$$

$$\mathcal{O}_{ij}(t) = \frac{\sum_{k=1}^N det\Big(\big((\lambda_i(t)I_N - G(t))(\lambda_j(t)I_N - G(t))^*\big)_{k|k}\Big)}{\prod_{p(\neq i)}(\lambda_i(t) - \lambda_p(t)) \prod_{q(\neq j)} \overline{(\lambda_j(t) - \lambda_q(t))}}$$

以上のことから, GE の場合 Overlaps が固有値過程に影響を与えていることがわかる. これは Dyson ブラウン運動などの正規行列のモデルでは起こらなかったことであり, 非正規行列特有の現象である. 本講演では上の結果からさらに固有値過程の時間変更による表示について議論する. また数値実験の結果 [5] についても言及する.

参考文献

[1] M. L. Mehta, Random Matrices, second edition, Academic Press (1991).

[2] J.Grela, P.Warchol, Full Dysonian dynamics of the complex Ginibre ensemble, J. Phys. A: Math. Theor. Vol.51, Num.425203(2018)

[3] P. Bourgade, G. Dubach, The distribution of overlaps between eigenvectors of Ginibre matrices, arXiv:1801.01219v1 (2018)

[4] F. J. Dyson, A Brownian-motion model for the eigenvalues of a random matrix, J. Math. Phys.,Vol. 3, 1192-1198 (1962)

[5] J.-P.Blaizot, J.Grela, M.A.Nowak, W.Tarnowski, P.Warchol, Ornstein-Uhlenbeck diffusion of hermitian and non-hermitian matrices-unexpected links, J.Stat.Mech.Vol.2016,May,054037(2016)

A hypercontractive family of the Ornstein–Uhlenbeck semigroup and its connection with Φ-entropy inequalities*

針谷 祐 (東北大学)

Given a positive integer d, let γ_d be the d-dimensional standard Gaussian measure. For every $p > 0$, define $L^p(\gamma_d)$ to be the set of measurable functions $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ such that $\|f\|_p^p := \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p \, \gamma_d(dx) < \infty$ (we abuse the notation even when $p < 1$). We denote by $Q = \{Q_t\}_{t \geq 0}$ the Ornstein–Uhlenbeck semigroup acting on $L^1(\gamma_d)$: for $f \in L^1(\gamma_d)$ and $t \geq 0$,

$$(Q_t f)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right) \gamma_d(dy), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

It is well known that Q enjoys the hypercontractivity: if $f \in L^p(\gamma_d)$ for some $p > 1$, then

$$\|Q_t f\|_{q(t)} \leq \|f\|_p \quad \text{for all } t \geq 0, \tag{HC}$$

where $q(t) = e^{2t}(p-1)+1$. The hypercontractivity (HC) was firstly observed by Nelson [6] and found later by Gross [4] to be equivalent to the (Gaussian) logarithmic Sobolev inequality†:

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f|^2 \log|f| \, d\gamma_d \leq \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f|^2 \, d\gamma_d + \|f\|_2^2 \log \|f\|_2 \,, \tag{LSI}$$

which holds true for any weakly differentiable function f in $L^2(\gamma_d)$ with $|\nabla f| \in L^2(\gamma_d)$. It is also known (see [1, Proposition 4]) that (HC) is equivalent to the exponential hypercontractivity: for any $f \in L^1(\gamma_d)$ with $e^f \in L^1(\gamma_d)$, it holds that

$$\|\exp(Q_t f)\|_{e^{2t}} \leq \|e^f\|_1 \quad \text{for all } t \geq 0. \tag{eHC}$$

One of the objectives of this talk is to show, by employing stochastic analysis, that two hypercontractivities (HC) and (eHC) are unified into

Theorem 1 ([5], Theorem 1.1)**.** *Let a positive function c in $C^1((0,\infty))$ satisfy*

$$c' > 0 \text{ and } c/c' \text{ is concave on } (0,\infty), \tag{C}$$

and set

$$u(t,x) = \int_0^x c(y)^{e^{2t}} dy, \quad t \geq 0, \ x > 0. \tag{1}$$

Then for any nonnegative, measurable function f on $\mathbb{R}^d$ such that

$$u(0,f) \in L^1(\gamma_d),$$

we have

$$v\left(t, \|u(t, Q_t f)\|_1\right) \leq v\left(0, \|u(0,f)\|_1\right) \quad \text{for all } t \geq 0. \tag{uHC}$$

Here for every $t \geq 0$, the function $v(t,\cdot)$ is the inverse function of $u(t,x)$, $x > 0$.

Typical examples of functions c fulfilling the condition (C) are x^{p-1} with $p > 1$ and e^x; in fact, they both satisfy $(c/c')'' = 0$. These two choices of c in Theorem 1 lead to (HC) and (eHC), respectively. Another example of c will be given in the talk.

Recall the well-known fact that differentiating the left-hand side of (HC) at $t = 0$ yields (LSI); the same argument enables us to obtain from (uHC) the following generalization of (LSI):

*This talk is based on [5].

†The Gaussian logarithmic Sobolev inequality goes back to Stam [7].

Corollary 1 ([5], Corollary 3.1)**.** *For a function c satisfying the assumptions in Theorem 1, set*

$$G(x) = \int_0^x c(y)\,dy \qquad \textit{and} \qquad H(x) = \int_0^x c(y)\log c(y)\,dy$$

for $x > 0$. Then for any $f \in C_b^1(\mathbb{R}^d)$ with $\inf_{x\in\mathbb{R}^d} f(x) > 0$, we have

$$\int_{\mathbb{R}^d} H(f)\,d\gamma_d \le \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} c'(f)\,|\nabla f|^2\,d\gamma_d + H\circ G^{-1}\left(\|G(f)\|_1\right). \tag{gLSI}$$

Here G^{-1} is the inverse function of G.

It is shown in [5, Proposition 3.3] that for every function f as in Corollary 1, the validity of (gLSI) for any positive $c \in C^1((0,\infty))$ satisfying (C), is necessary and sufficient for that of Φ-*entropy inequalities* for any $\Phi \in C^2((0,\infty))$ satisfying the condition that

$$\Phi'' > 0 \text{ and } 1/\Phi'' \text{ is concave on } (0,\infty). \tag{P}$$

In a general setting of *Markov triple* (E,μ,Γ) with associated Dirichlet form $(\mathcal{E},\mathcal{D}(\mathcal{E}))$ as treated in detail in [2, Chapters 4–7], the triple is said to satisfy the Φ-entropy inequality with constant $R > 0$ if

$$\int_E \Phi(f)\,d\mu - \Phi\left(\int_E f\,d\mu\right) \le \frac{R}{2}\int_E \Phi''(f)\Gamma(f,f)\,d\mu \tag{ΦI}$$

for any positive $f \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$. In the setting of the present talk, namely in the case $E = \mathbb{R}^d$, $\mu = \gamma_d$ and $\Gamma(f,f) = |\nabla f|^2$, it is known (see, e.g., [3, Section 4]) that (ΦI) holds with $R = 1$ under the condition (P). In this talk, we show that in the present setting, the hypercontractive family (uHC) indexed by positive c's satisfying (C), is equivalent to the family of Φ-entropy inequalities (ΦI) with $R = 1$ indexed by Φ's satisfying (P). The same reasoning applies to the general setting of Markov triple as well. For instance, if a probability measure μ on $E = \mathbb{R}^d$ is in the form $\mu(dx) = e^{-V(x)}dx$ with $V \in C^2(\mathbb{R}^d)$ whose Hessian matrix satisfies $y\cdot\mathrm{Hess}_V(x)y \ge \rho|y|^2$, $x, y \in \mathbb{R}^d$, for some $\rho > 0$, then the Φ-entropy inequality (ΦI) for $\Gamma(f,f) = |\nabla f|^2$ is known (cf. [3, Corollary 2.1]) to hold with $R = 1/\rho$, which entails that (uHC) holds true for the semigroup generated by $\Delta - \nabla V\cdot\nabla$, with exponent e^{2t} in (1) replaced by $e^{2\rho t}$.

If time permits, we will also present a unification of (eHC) and the reverse hypercontractivity of the Ornstein–Uhlenbeck semigroup Q.

References

[1] D. Bakry, M. Émery, Diffusions hypercontractives, in: Séminaire de Probabilités, XIX, 1983/84, pp. 177–206, Lecture Notes in Math. **1123**, Springer, Berlin, 1985.

[2] D. Bakry, I. Gentil, M. Ledoux, Analysis and Geometry of Markov Diffusion Operators, Springer, Cham, 2014.

[3] D. Chafaï, Entropies, convexity, and functional inequalities: on Φ-entropies and Φ-Sobolev inequalities, J. Math. Kyoto Univ. **44** (2004), 325–363.

[4] L. Gross, Logarithmic Sobolev inequalities, Amer. J. Math. **97** (1975), 1061–1083.

[5] Y. Hariya, A unification of hypercontractivities of the Ornstein–Uhlenbeck semigroup and its connection with Φ-entropy inequalities, J. Funct. Anal. **275** (2018), 2647–2683.

[6] E. Nelson, The free Markoff field, J. Funct. Anal. **12** (1973), 211–227.

[7] A.J. Stam, Some inequalities satisfied by the quantities of information of Fisher and Shannon, Inform. and Control **2** (1959), 101–112.

Biased random walk on the trace of biased random walk

D. A. Croydon (University of Warwick)

NB. This talk is based on the forthcoming work [8], which is joint with M. P. Holmes (University of Melbourne).

The study of stochastic processes in disordered media is an important aspect of modern probability. Models in this area for which extensive research has been conducted include the classical model of random walk in random environment, as well as random walks on random graphs, such as Galton-Watson trees and percolation clusters. Typical properties that one is interested in include: (i) recurrence/transience; (ii) laws of large numbers (i.e. the existence of a deterministic limiting velocity); (iii) conditions for ballisticity/sub-ballisticity (i.e. strict positivity of the speed or not); (iv) regularity (i.e. continuity, monotonicity or lack thereof) of attributes (e.g. the velocity) in terms of some underlying parameter; and (v) scaling limits.

In this paper, we tackle the first three of these issues for a biased random walk on a random graph, as given by the trace of a biased random walk on $\mathbb{Z}^d$; we henceforth call the process of interest the 'biased random walk on the trace of biased random walk' (BRWBRW). The biases are chosen so that both the original walk (defining the graph) and the BRWBRW are transient – somewhat remarkably, this does not mean that we necessarily require the underlying drift of the two walks to be oriented in the same direction. By standard regeneration arguments, the BRWBRW admits a limiting speed. Regarding the issue of ballisticity, we note that, when it backtracks, the initial walk creates traps for the BRWBRW. We will show that the effect of this trapping can lead to zero speeds, and in particular establish a sharp phase transition for whether the BRWBRW is ballistic or sub-ballistic.

We conclude by briefly relating our work to other studies in which trapping has been observed for biased random walk on random graphs. As early as the 1980s, physicists observed that such phenomenon might be relevant when the random graphs are percolation clusters, empirically demonstrating the non-monotonicity of the speed, and sub-ballisticity in the strong bias regime [1]. Mathematically, a phase transition between ballisticity and sub-ballisticity was first shown rigourously for the simpler model of random walk on supercritical Galton-Watson trees [10] (see also [3, 5, 7] for recent work concerning more detailed properties of such processes), and has since been confirmed to hold in the percolation setting [4, 9, 11]. A relatively up-to-date survey of these developments is given in [2]. Qualitatively, our results match those established for Galton-Watson trees and percolation clusters, and, although we do not confirm it rigourously, we also observe empirically non-monotonic behaviour for the speed that is similar to the behaviour expected for these other models. Moreover, whilst our graphs are more complex than trees, in the sense there is not a unique shortest path between vertices and the traps are less obviously defined, the model is still more tractable than the percolation case. As a result, we are able to give a more concrete expression for the critical point that separates the ballistic and sub-ballistic phase, which we are even able to evaluate explicitly in examples. Finally, we note that, in another related work, biased random walk on an unbiased random walk has been shown to exhibit localisation on a logarithmic scale [6].

References

[1] M. Barma and D. Dhar, *Directed diffusion in a percolation network*, J. Phys. C **16** (1983), no. 8, 1451.

[2] G. Ben Arous and A. Fribergh, *Biased random walks on random graphs*, Probability and statistical physics in St. Petersburg, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 91, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2016, pp. 99–153.

[3] G. Ben Arous, A. Fribergh, N. Gantert, and A. Hammond, *Biased random walks on Galton-Watson trees with leaves*, Ann. Probab. **40** (2012), no. 1, 280–338.

[4] N. Berger, N. Gantert, and Y. Peres, *The speed of biased random walk on percolation clusters*, Probab. Theory Related Fields **126** (2003), no. 2, 221–242.

[5] A. Bowditch, *Escape regimes of biased random walks on Galton-Watson trees*, Probab. Theory Related Fields **170** (2018), no. 3-4, 685–768.

[6] D. A. Croydon, *Slow movement of a random walk on the range of a random walk in the presence of an external field*, Probab. Theory Related Fields **157** (2013), no. 3-4, 515–534.

[7] D. A. Croydon, A. Fribergh, and T. Kumagai, *Biased random walk on critical Galton-Watson trees conditioned to survive*, Probab. Theory Related Fields **157** (2013), no. 1-2, 453–507.

[8] Croydon, D. A. and M. P. Holmes (2018). *Biased random walk on the trace of biased random walk on the trace of . . . .* In preparation.

[9] A. Fribergh and A. Hammond, *Phase transition for the speed of the biased random walk on the supercritical percolation cluster*, Comm. Pure Appl. Math. **67** (2014), no. 2, 173–245.

[10] R. Lyons, R. Pemantle, and Y. Peres, *Biased random walks on Galton-Watson trees*, Probab. Theory Related Fields **106** (1996), no. 2, 249–264.

[11] A.-S. Sznitman, *On the anisotropic walk on the supercritical percolation cluster*, Comm. Math. Phys. **240** (2003), no. 1-2, 123–148.