正則基底に関してOgawa可積分な乱関数のSFCによる同定

星野　浄生　(大阪府立大学)*

1.　序

乱関数が確率Fourier係数(SFC)で同定されるか, という問題が論じられてきた. 特にSFCがOgawa積分で与えられた場合において, [5], [1], [6]で先行結果がある. [5], [1]では, 有界変動乱関数の重複対数の法則を用いたSFCからの再構成, [6]では, 適当な複素数値乱関数のcross variationを用いた再構成が示されている. 本講演では, 正則CONSに関してOgawa可積分な乱関数のcross variationを用いた再構成を与える.

2.　設定

$(B_t)_{t\in[0,1]}$をfilter付確率空間$(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,1]},P)$上のBrown運動, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$を$L^2([0,1];\mathbb{C})$のCONSで各e_nの実部, 虚部は有界変動であるとする. $L^2([0,1];\mathbb{R})$のCONS $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$は, $\sup_{M\in\mathbb{N}}\Big|\sum_{m=1}^{M}\varphi_m\int_0^{\cdot}\varphi_m(s)\,ds\Big|_{L^2[0,1]}<\infty$ を満たすとき正則であるという. $L^2([0,1];\mathbb{R})$の正則CONSに関するOgawa積分(正則Ogawa積分), Itô 積分, 可微分指数rのi-parameter 2乗可積分Wiener汎関数のSobolev空間, Skorokhod積分をそれぞれ$\int_0^1 d_*B$, $\int_0^1 dB$, $\mathcal{L}_i^{r,2}$, $\int_0^1\delta B$ と表す([2]のDefinition 2.1,2.3,2.4を参照). $X,Y:[0,1]\to L^0(\Omega)$のtでのcross variationが存在するとき, それを$\langle X,Y\rangle_t$と表し, quadratic variation $\langle X,X\rangle_t$が存在するとき, それを$[X]_t$と表す.

$a\in L^0([0,1]\times\Omega;\mathbb{C}), b\in L^0(\Omega;L^2([0,1];\mathbb{C}))$に対して以下を定義する.

定義 1 (正則Ogawa型SFC) 各$n\in\mathbb{N}$に対し, $\overline{e_n}a$は正則Ogawa積分可能であるとする. 正則Ogawa型確率微分$d_*Y_t=a(t)\,d_*B_t+b(t)\,dt$, $t\in[0,1]$の$(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$に関する確率Fourier係数(正則Ogawa型SFC, 或いは, SFC-O$_*$) (e_n,d_*Y)を次式で定義する:

$$(e_n,d_*Y):=\int_0^1\overline{e_n(t)}\,d_*Y_t=\int_0^1\overline{e_n(t)}a(t)\,d_*B_t+\int_0^1\overline{e_n(t)}b(t)\,dt.$$

特に, $b=0$のとき, $(e_n,d_*Y)=(e_n,a\,d_*B)$を$a(t)$のSFC-O$_*$ともいう.

3.　乱関数の正則Ogawa型SFCによる再構成

まず, 以下の乱関数の族 ($L^0([0,1]\times\Omega)$の部分集合) を定義する:

$$\mathcal{A}=\{A\in L^0([0,1]\times\Omega)\,|\,\mathrm{Re}\,A,\mathrm{Im}\,A \text{ は 有界変動 a.s. }\},$$
$$\mathcal{M}=\Big\{\int_0^{\cdot}f\,dB\,\Big|\,f\in L^0(\Omega;L^2[0,1]), f \text{ は } (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,1]}\text{-発展的可測}\Big\},$$
$$\mathcal{W}=\Big\{\int_0^{\cdot}f\,\delta B\,\Big|\,f\in\mathcal{L}_1^{2,2}\Big\}+\mathrm{span}\Big\{T_Kf\,\Big|\,f\in\mathcal{L}_1^{1,2},\sup_{t\in[0,1]}|K(t,\cdot)|_{L^2[0,1]}<\infty\Big\},$$

但し, $f\in\mathcal{L}_1^{1,2}$, $K\in L^2([0,1]^2)$に対し, $T_Kf(t):=\int_0^1K(t,s)f(s)\,ds$. また, $\mathcal{A},\mathcal{W}$の元は非因果的であることに注意する. $\mathscr{L}=\mathcal{A}+\mathcal{M}+\mathcal{W}$とおく.

---

*e-mail: su301032@edu.osakafu-u.ac.jp

命題 1 $a \in \mathscr{L}$ とするとき, 以下が成り立つ:

(1) 任意の有界変動関数 $v : [0,1] \to \mathbb{R}$ に対し, va は正則 Ogawa 積分可能である.

(2) 0 に L^2-収束する任意の有界変動関数列 $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し, $\underset{n\to\infty}{\text{l.i.p.}} \int_0^1 v_n a \, d_\varphi B = 0$. 特に,

$$\mathcal{P}((e_n, d_*Y))_{n\in\mathbb{N}}(t) := \underset{N\to\infty}{\text{l.i.p.}} \sum_{n=1}^{N} \int_0^t e_n(s)\, ds \, (e_n, d_*Y) = Y_t, \ \forall t \in [0,1],$$

ここで, $d_*Y_t = a(t)\, d_*B_t + b(t)\, dt$, $t \in [0,1]$.

次に, $\mathcal{P}$ と cross variation $\langle \, , \, \rangle_t$ により SFC-O$_*$ で同定される乱関数の全体として $\mathscr{L}_{\mathrm{PC}}^{e,*}$ を次で定める:

$$\mathscr{L}_{\mathrm{PC}}^{e,*} = \Big\{ a \in L^0([0,1]\times\Omega) \,\Big|\, \mathcal{P}((e_n, a\, d_*B))_{n\in\mathbb{N}} = \int_0^{\cdot} a\, d_*B,$$
$$\forall s,t \in [0,1] \ \Big[\int_0^{\cdot} a\, d_*B \Big]_t = \int_0^t |a(u)|^2\, du, \ \Big\langle \int_0^{\cdot} a\, d_*B, \ B_{\cdot\wedge s} \Big\rangle_t = \int_0^{t\wedge s} a(u)\, du \Big\}.$$

命題 2 $\mathcal{A}, \mathcal{M}, \mathcal{W} \subset \mathscr{L}_{\mathrm{PC}}^{e,*}$.

定理 1 $\mathscr{L}_{\mathrm{PC}}^{e,*}$ は線形空間となる.

系 1 $a(t)$ は $\mathrm{Re}\ a, \mathrm{Im}\ a \in \mathscr{L}_{\mathrm{PC}}^{e,*}$ を満たすとする. このとき, $d_*Y_t = a(t)\, d_*B_t + b(t)\, dt$, $t \in [0,1]$ とすると以下が成り立つ:

(1) $a(t)$ は $((e_n, d_*Y))_{n\in\mathbb{N}}$ で $a(t) = \frac{d}{dt}\big\langle \mathcal{P}((e_n, d_*Y))_{n\in\mathbb{N}}, B \big\rangle_t$ により同定される.

(2) $|\mathrm{Re}\ a|$, $|\mathrm{Im}\ a|$, $\mathrm{Re}\ a\, \mathrm{Im}\ a$, $(\mathrm{sgn}\, a)a^{\dagger}$ は $((e_n, d_*Y))_{n\in\mathbb{N}}$ で $Y_t = \mathcal{P}((e_n, d_*Y))_{n\in\mathbb{N}}$ と性質: $\forall f, g \in \mathscr{L}_{\mathrm{PC}}^{e,*}$ $\int_0^t f(s)\overline{g(s)}\, ds = \big\langle \int_0^{\cdot} f\, d_*B, \int_0^{\cdot} g\, d_*B \big\rangle_t$ により同定される.

注 1) (2) における同定には $(B_t)_{t\in[0,1]}$ を必要としない.
注 2) $((e_n, d_*Y))_{n\in\mathbb{N}}$ から有限個の SFC (e_n, d_*Y) が欠落していても (1),(2) は成り立つ.
注 3) $a(t)$ が同定されるので b も $((e_n, d_*Y))_{n\in\mathbb{N}}$ で同定される.
注 4) $a \in \mathscr{L}$ であれば, $a(t)$ は系 1 の仮定を満たす.

参考文献

[1] K. Hoshino, Identification of finite variation processes from the SFC. MSJ Autumn Meeting, abstract (2017)

[2] K. Hoshino, T. Kazumi, On the Ogawa integrability of noncausal Wiener functionals, to appear, Stochastics (2018)

[3] D. Nualart, E. Pardoux, Stochastic calculus with anticipating integrands. Probab. Th. Rel. Fields , 78, pp.535-581 (1988)

[4] S. Ogawa, The stochastic integral of noncausal type as an extension of the symmetric integrals. Japan J. Appl. Math. **2**, 229-240 (1985)

[5] S. Ogawa, H. Uemura, On the identification of noncausal functions from the SFCs. RIMS Kôkyûroku. **1952**, 128-134 (2015-06)

[6] S. Ogawa, H. Uemura, On the reconstruction of random function from its SFCs defined by an arbitrary CONS. Symposium on Probability Theory, abstract (2017)

† $\mathrm{sgn}\, z = 1$ if $0 \le \arg z < \pi$, $\mathrm{sgn}\, z = -1$ o/w, $z \in \mathbb{C}$ $(\arg 0 := 0)$.

レヴィ市場におけるデジタルオプションに対する局所的リスク最小化問題について

鈴木良一
慶應義塾大学理工学部数理科学科
email: r_suzuki@z3.keio.jp
website: https://sites.google.com/site/ryoichisuzukifinance/

December 19, 2018.

Locally risk-minimizing (LRM) is a well-known hedging method for contingent claims in a quadratic way (see e.g., [2] and [3]). By using Malliavin calculus, we can obtain explicit representations of LRM for incomplete market models whose asset price process is described by a solution to a stochastic differential equation (SDE) driven by a Lévy process ([1]).

On the other hand, there is one important derivative security describe by indicator function called digital option. A digital option pays a fixed cash amount if some condition is realized. Mathematical representation of digital (or binary) options are given by

$$\mathbf{1}_{[K,\infty)}(S_T) = \begin{cases} 1 & \text{for } S_T \geq K, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

where $\{S_t\}_{t\in[0,T]}$ is a stock price process and $K > 0$ is a constant number that is fixed by the contract. It is popular and important derivative security. Therefore, to study digital options, we consider Malliavin differentiability of indicator functions ([4]).

In this talk, we first consider Malliavin differentiability of indicator functions on canonical Lévy spaces. By using it, we obtain explicit representations of LRM for digital options in markets driven by Lévy processes.

References

[1] T. Arai and R. Suzuki. Local risk-minimization for Lévy markets. *International Journal of Financial Engineering.* **vol.2** (2015), no. 2, 1550015, 28 pp.

[2] M. Schweizer. A guided tour through quadratic hedging approaches. *Handbooks in Mathematical Finance: Option Pricing, Interest Rates and Risk Management.* Cambridge University Press, 538–574, 2001.

[3] M. Schweizer. Local risk-minimization for multidimensional assets and payment streams. *Banach Center Publications.* **83** (2008), 213–229.

[4] R. Suzuki. Malliavin differentiability of indicator functions on canonical Lévy spaces. *Statistics and Probability Letters.* **137** (2018), 183–190.

FBSDES の解とニュートン法について

土屋貴裕 （会津大学），田口大 （大阪大学)

Forward-backward stochastic differential equations (FBSDEs)

$$
\begin{cases} X(t) &= X(0) + \int_0^t b\Big(s,\omega,\Theta(s)\Big)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma\Big(s,\omega,\Theta(s)\Big)\,\mathrm{d}W(s), \\ Y(t) &= \varphi\left(X(T)\right) + \int_t^T f\Big(s,\omega,\Theta(s)\Big)\,\mathrm{d}s - \int_t^T Z(s)\,\mathrm{d}W(s), \end{cases} \tag{1}
$$

を満たす三組 $\Theta \equiv (X,Y,Z) \equiv (X(t),Y(t),Z(t))_{t\in[0,T]}$ は $\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times d}$ に値を取るとする．W は d-次元の Wiener 過程，b, f, σ, そして φ は可測な関数であり，一般にランダムであっても良い．この FBSDEs (1) はいわゆる終端条件 $Y(T) = \varphi\left(X(T)\right)$ があるため Stochastic differential equations (SDEs) とはかなり様相が異なる．その解の存在と一意性について次のようなアプローチがある, 例えば [8] や [4] を参考にすると

Contraction mapping: 局所的，すなわち小さい $T > 0$ でのみで解が構築できる.
The Four Step scheme: 大域的であるがマルコフ型のみ有効.
The method of continuation: マルコフ型を過程しないが “monotonicity”条件がいる.

本講演では (X,Y,Z) を近似列 (X_n,Y_n,Z_n) を Newton 法のアナロジーで構成する: φ, b, f, σ に適当な滑らかさを仮定して，

$$
\begin{aligned} X_{n+1}(t) &= X_{n+1}(0) + \int_0^t b_n\Big(s,\omega,\Theta_{n+1}(s)\Big)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma_n\Big(s,\omega,\Theta_{n+1}(s)\Big)\,\mathrm{d}W(s), \\ Y_{n+1}(t) &= \varphi_n(X_{n+1}(T)) + \int_t^T f_n\Big(s,\omega,\Theta_{n+1}(s)\Big)\,\mathrm{d}s - \int_t^T Z_{n+1}(s)\,\mathrm{d}W(s). \end{aligned} \tag{2}
$$

ここで，$\varphi_n(x) = \varphi(X_n(T)) + \nabla_x\varphi(X_n(T))(x - X_n(T))$, $x \in \mathbb{R}^l$ であり，係数 b_n, σ_n, f_n は (1) の状態変数 $\theta = (x,y,z) \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times d}$ に関して 1 次近似したものとする：

$$
b_n\Big(s,\omega,\theta\Big) = b\Big(s,\omega,\Theta_n(s)\Big) + \nabla_\theta b\Big(s,\omega,\Theta_n(s)\Big)(\theta - \Theta_n(s)), \quad (s,\omega,\theta) \in [0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}^l\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{m\times d},
$$

同様に σ_n, f_n も定義する．

すると線形な係数 b_n, σ_n, f_n であるから三組 $\Theta_n \equiv (X_n,Y_n,Z_n) \equiv (X_n(t),Y_n(t),Z_n(t))_{t\in[0,T]}$ を定義できそうに思えるが，一般に well-defined でない．それどころか FBSDEs (1) は係数が線形かつ有界，さらに一次元であっても大域的には解の一意性が崩れ，しかも上記の既存の方法のいずれも適応できない，[4].

そこで論文 [6] では特に X（の拡散係数）は (Y,Z) に関係しない decoupled FBSDEs,

$$
\begin{cases} X(t) &= X(0) + \int_0^t b(s,X(s))\,\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s,X(s))\,\mathrm{d}W(s), \\ Y(t) &= \varphi\left(X(T)\right) + \int_t^T f(s,X(s),Y(s),Z(s))\,\mathrm{d}s - \int_t^T Z(s)\,\mathrm{d}W(s). \end{cases} \tag{3}
$$

のときに次を示した．

Theorem 1 ([6])**.** b, σ, f, φ は微分可能，微分係数は (s,ω)-*a.e.* で一様に有界，さらに

$$
\mathbb{E}\left(|X(0)|^2 + \int_0^T \Big|b\Big(s,\omega,0\Big)\Big|^2 + \Big|\sigma\Big(s,\omega,0\Big)\Big|^2 + \Big|f\Big(s,\omega,0,0,0\Big)\Big|^2\,\mathrm{d}s\right) < \infty,
$$

とする．このとき，*decoupled FBSDEs* (3) の解が存在し，T と係数 b, σ, f の微分で定まる定数 $C > 0$ が存在する：$X_0(0) = X(0)$ を満たす任意の初期値 $(X_0, Y_0, Z_0) \in \mathbb{S}_l^2 \times \mathbb{S}_m^2 \times \mathbb{H}^2$ に対して

$$\|(X - X_{n+1}, Y - Y_{n+1}, Z - Z_{n+1})\| \leq C2^{-n}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

通常のニュートン近似の収束は有限次元であっても関数の凸性 [5, page 453]，もしくは初期値を解に十分に近く取る条件を仮定する [2, Theorem **XVI**]．実際に Vidossich は（応用分野で常微分方程式の解の効率的な近似方法として用いられていた）Chaplygin 近似は無限次元 Banach 空間のニュートン法であることを見抜き，その大域的な収束を [7, Theorem (1.3)] で与えた．さらに SDEs においてニュートン法の収束が [3] で示された．ただし，それらは（局所的な一次もしくは単に）収束は示しているが大域的に一次収束することまでは得られていなかった．

本研究の貢献は decoupled FBSDEs におけるニュートン法の大域的な一次収束である．鍵となるとは Forward X については天野氏 [1] による Gronwall 不等式型の評価であり，Backward (Y, Z) については重み付きノルムを考えることにある．ここで必要な表記について一部，記載する．終端時間を $T > 0$ とする．$m \in \mathbb{N}$ に対して

$$\mathbb{S}_m^2 = \left\{ Y : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^m \text{ continuous, adapted} : \|Y\|_{\mathbb{S}_m^2} = \mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq s \leq T} |Y(s)|^2\right] < \infty \right\},$$

$$\mathbb{H}^2 = \left\{ Z : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^d \text{ adapted} : \|Z\|_{\mathbb{H}^2} = \mathbb{E}\left[\int_0^T |Z(s)|^2 \, \mathrm{d}s\right] < \infty \right\},$$

各々の Banach 空間 $\mathbb{S}_m^2 \times \mathbb{H}^2$，$\mathbb{S}_l^2$ は

$$\|(Y, Z)\|^2 = \|Y\|_{\mathbb{S}_m^2}^2 + \|Z\|_{\mathbb{H}^2}^2, \quad \|X\|^2 = \|X\|_{\mathbb{S}_l^2}^2.$$

また $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し, 重み付きノルムは

$$\|(Y, Z)\|_\alpha^2 = \mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq s \leq T} e^{\alpha s} |Y(s)|^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s} |Z(s)|^2 \, \mathrm{d}s\right].$$

さらに Kantorovitch 定理を援用することで十分大きい $n \in \mathbb{N}$ では二次収束することを述べる．また論文 [6] では証明はできたものの，凸性を仮定していない（ように見えた）が大域的な収束が導かれるのか不鮮明であった．本講演ではその点をできる限り整理して解説する．

References

1. Kazuo Amano, *A note on Newton's method for stochastic differential equations and its error estimate.*, Proc. Japan Acad., Ser. A **85** (2009), no. 3, 19–21.
2. L Kantorovitch, *The method of successive approximations for functional equations*, Acta Math. **71** (1939), 63–97.
3. Shigetoku Kawabata and Toshio Yamada, *On Newton's method for stochastic differential equations*, Séminaire de probabilités de Strasbourg, Lecture Notes in Math., vol. 1485, Springer, Berlin, 1991, pp. 121–137.
4. Jin Ma, Zhen Wu, Detao Zhang, and Jianfeng Zhang, *On well-posedness of forward-backward SDEs – a unified approach.*, Ann. Appl. Probab. **25** (2015), no. 4, 2168–2214.
5. J M Ortega and W C Rheinboldt, *Iterative solution of nonlinear equations in several variables*, Classics in Applied Mathematics, vol. 30, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2000.
6. Dai Taguchi and Takahiro Tsuchiya, *Newton-Kantorovitch method for decoupled forward-backward stochastic differential equations*, (2018).
7. Giovanni Vidossich, *Chaplygin's method is Newton's method*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **66** (1978), no. 1, 188–206.
8. Jianfeng Zhang, *Backward stochastic differential equations. From linear to fully nonlinear theory.*, New York, NY: Springer, 2017.

このファイルは QR コードを読む込事で利用できます．

CONSERVATIVENESS AND FELLER PROPERTY OF DIFFUSION PROCESSES ON RIEMANNIAN MANIFOLDS WITH m-BAKRY-ÉMERY RICCI TENSOR FOR $m \le 1$

桑江一洋 (K. Kuwae) 福岡大学理学部

1. Laplacian の比較定理

この講演では中国科学院の Xiang-Dong Li 氏との Laplacian の比較定理に関する共同研究 [5] に基づき, 氏と北京師範大学の Songzi Li 氏との共同研究 [6] について報告する. (M,g) を完備で滑らかな境界のないリーマン多様体とする。$\phi \in C^2(M)$ を固定する。$C_0^\infty(M)$ 上の作用素 L を $L := \Delta - \langle \nabla\phi, \nabla\cdot\rangle$ で定めると, これは $\mu := e^{-\phi}\mathrm{vol}_g$ について対称になる。すなわち $\int_M(-Lf)g\mathrm{d}\mu = \int_M\langle\nabla f, \nabla g\rangle\mathrm{d}\mu =: \mathcal{E}(f,g)$ が $f,g \in C_0^\infty(M)$ で成立する。L を Witten Laplacian あるいは重み付き Laplacian と呼ぶ。ディリクレ形式 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ を $(\mathcal{E}, C_0^\infty(M))$ の $L^2(M;\mu)$ 上の最小閉拡張とし, $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ に対応する拡散過程を $\mathbf{X} = (\Omega, X_t, \mathbf{P}_x)$ とおく。$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ の $L^2(M;\mu)$-半群は連続な熱核を許容することが知られている ($\phi \in C^\infty(M)$ のときは [3, 7.5] を参照)。$m \in]-\infty, +\infty]$ に対して m-Bakry-Émery リッチテンソル $\mathrm{Ric}_{m,n}(L)$ を

$$\mathrm{Ric}_{m,n}(L)(x) := \mathrm{Ric}(x) + \mathrm{Hess}\,\phi(x) - \frac{\nabla\phi(x)\otimes\nabla\phi(x)}{m-n}$$

で定める。M 上の関数 K に対して $\mathrm{Ric}_{m,n}(L)(x) \ge K(x)$, $x \in M$ が成立するとき曲率次元条件 $\mathrm{CD}(K,m)$ が成立すると呼ぶ。$m = n$ のときは ϕ は定数と規約する。この場合は $\mathrm{Ric}_{m,n}(L)(x) = \mathrm{Ric}(x)$ となる。$m \ge n$ で K が定数なら (M, d_g, μ) の $\mathsf{RCD}(K,m)$-条件と同値になる。本講演では $m \le 1$ の場合に重み付き Laplacian L の比較定理 ([5]) に基づいて $\mathbf{X}$ の保存性と Feller 性への変形されたやや強い判定条件を与える。$r_p(x) := d_g(x,p)$ を距離関数とする。以下の比較定理は $m = 1$ で κ が定数の場合に [9] で最初に証明された。

定理 1.1 (Laplacian の比較定理 [5], cf. [9])**.** $x, p \in M$, $m \le 1$ とする。$\mathrm{Ric}_{m,n}(L)(x) \ge (n-m)\kappa(s_p(x))e^{-\frac{4\phi(x)}{n-m}}$ なら, $Lr_p(x) \le (n-m)\mathsf{cot}_\kappa(s_p(x))e^{-\frac{2\phi(x)}{n-m}}$ が $s_p(x) < \delta_\kappa$ で成立する。ここで κ は $[0,+\infty[$ 上の連続関数で, $s_p(x)$ は

$$s_p(x) = \inf\left\{ \int_0^{r_p(x)} e^{-\frac{2\phi(\gamma_t)}{n-m}}\mathrm{d}t \;\middle|\; \gamma\text{は単位速度測地線で}\gamma_0 = p, \gamma_{r_p(x)} = x \right\}$$

で与えられる。cot_κ は初期条件 $\lim_{s\to 0} s\,\mathsf{cot}_\kappa(s) = 1$ をみたす Riccati 方程式

$$-\frac{\mathrm{d}\mathsf{cot}_\kappa}{\mathrm{d}s}(s) = \kappa(s) + \mathsf{cot}_\kappa(s)^2, \tag{1.1}$$

の $[0,\delta_\kappa[$ 上の解で δ_κ はその爆発時刻である。$\kappa \le 0$ なら $\delta_\kappa = +\infty$ となる。$\delta_\kappa < \infty$ なら末期条件 $\lim_{s\to\delta_\kappa}(\delta_\kappa - s)\,\mathsf{cot}_\kappa(s) = 1$ も満たされる。κ が定数のときは $\kappa \le 0$ の場合も込めて $\mathsf{cot}_\kappa(s) = \sqrt{\kappa}\cos(\sqrt{\kappa}s)/\sin(\sqrt{\kappa}s)$, $\delta_\kappa = \pi/\sqrt{\kappa_+}$ となる。

2. 主結果

$\phi_p(r) := \inf_{B_r(p)} \phi$ とする。K を $[0,+\infty[$ 上の非負連続な非減少関数で以下の $(\mathbf{K})$ という条件を満たすとする:

$$(\mathbf{K}): \qquad \int_{r_o}^{\infty} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\mathsf{K}\left(e^{-\frac{2\phi_p(r)}{n-m}}r\right)e^{-\frac{2\phi_p(r)}{n-m}}}} = +\infty \quad \text{for some} \quad r_o > 0.$$

条件 $(\mathbf{K})$ は $p \in M$ には依存しない。

定理 2.1 ($\mathbf{X}$ の保存性)**.** $p \in M$ を固定する。条件 $(\mathbf{K})$ を仮定し

$$\mathrm{Ric}_{m,n}(L)(x) \geq -\mathsf{K}(s_p(x))e^{-\frac{4\phi(x)}{n-m}} \quad \textit{for any } x \in M \tag{2.1}$$

が $m \in]-\infty, 1]$ で成立するとする。このとき $\mathbf{X}$ は保存的である。

定理 2.2 ($\mathbf{X}$ の Feller 性)**.** 条件 $(\mathbf{K})$ を仮定し

$$\mathrm{Ric}_{m,n}(L)(z) \geq -\mathsf{K}(s_q(z))e^{-\frac{4\phi(z)}{n-m}} \quad \textit{for any} \quad z, q \in M \tag{2.2}$$

が $m \in]-\infty, 1]$ で成立するとする。このとき $\mathbf{X}$ は *Feller* 性をもつ。

定理 2.1の証明は Grigor'yan [2] の保存性の判定条件に帰着される。また定理 2.2の証明は Azencott [1] の Feller 性の判定条件に帰着される ([4] に通常の Laplacian の場合での証明がある)。$m \geq n$ の場合の Laplacian の比較定理は $\mathrm{Ric}_{m,n}(L)(x) \geq (m-1)\kappa(r_p(x))$ なら $Lr_p(x) \leq (m-1)\mathsf{cot}_\kappa(r_p(x))$, $r_p(x) < \delta_\kappa$ の形のため, $\mathbf{X}$ の保存性や Feller 性は $(\mathbf{K})$ よりも弱い条件である

$$\int_{r_o}^{\infty} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\mathsf{K}(r)}} = +\infty \quad \text{for some} \quad r_o > 0$$

で成立することが知られている ([8, Theorems 1.4 and 1.5])

References

[1] R. Azencott, *Behavior of diffusion semi-groups at infinity*, Bull. Soc. Math. France **102** (1974), 193–240.

[2] A. Grigor'yan, *On stochastically complete manifolds*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR **290** (1986), 534–537.

[3] A. Grigor'yan, *Heat kernel and analysis on manifolds*, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, **47**. American Mathematical Society, Providence, RI; International Press, Boston, MA, 2009.

[4] E. P. Hsu, *Stochastic analysis on manifolds*, Graduate Studies in Mathematics, **38**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[5] K. Kuwae and X.-D. Li, *Laplacian comparison theorem on Riemannian manifolds with* $\mathrm{CD}(K,m)$*-condition for* $m \leq 1$, preprint, 2018.

[6] K. Kuwae, S.-Z. Li and X.-D. Li, *Conservativeness and Feller property of diffusion processes on Riemannian manifolds with m-Bakry-Émery Ricci tensor for* $m \leq 1$, 2018, preprint.

[7] K. Kuwae, S.-Z. Li and X.-D. Li, *Liouville theorems and Harnack inequalities on Riemannian manifolds with* $\mathrm{CD}(K,m)$*-condition for* $m < 1$, 2018, in prepration.

[8] X.-D. Li, *Liouville theorems for symmetric diffusion operators on complete Riemannian manifolds*, J. Math. Pures Appl. (9) **84** (2005), no. 10, 1295–1361.

[9] W. Wylie and D. Yeroshkin, *On the geometry of Riemannian manifolds with density*, preprint, 2016.

Geometry of the random walk range conditioned on survival among Bernoulli obstacles

福島　竜輝[1]
京都大学数理解析研究所

Jian Ding (University of Pennsylvania), Rongfeng Sun (National University of Singapore), Changji Xu (University of Chicago) との共同研究

格子 $\mathbb{Z}^d$ 上に Bernoulli 分布する障害物を避けながらランダムウォークする粒子を考える．粒子と媒質の両方について平均をとると (annealed という[2]) 粒子は出発点を含む球状の領域に局在することが知られている．本研究ではこの粒子の軌跡が局在している球を埋め尽くすことを示し，さらに軌跡の境界の大きさに関する評価を得たので報告する．

$(\omega, \mathbb{P}_p)$ を $\mathbb{Z}^d$ 上の独立同分布 Bernoulli$(1-p)$ 確率変数，$(\{S_n\}_{n\ge 0}, P_0)$ を原点を出発点とする d 次元ランダムウォークとする．$\omega = (\omega_x)_{x\in\mathbb{Z}^d}$ に対して *obstacles* を $\mathcal{O}(\omega) := \{x \in \mathbb{Z}^d \colon \omega_x = 1\}$ で定め，ランダムウォークの到達時刻を $\tau_{\mathcal{O}}$ と書くことにする．粒子の挙動を記述するのは条件付き確率

$$\mu_N(\,\cdot\,) := \mathbb{P}_p \otimes P_0(\,\cdot \mid \tau_{\mathcal{O}(\omega)} > N)$$

であり，*annealed path measure* と呼ばれる．

以下 $d \ge 2$ とする．次が冒頭に述べた局在現象である．

Confinement property. (Sznitman [6], Bolthausen [2] for $d = 2$, Povel [5] for $d \ge 3$) $d \ge 2$, $p \in (0,1)$ に対して $\varrho_0(d,p) > 0$，$x_N(\omega) \in \mathbb{Z}^d$ が存在して，任意の $\epsilon > 0$ に対して次が成り立つ：

$$\mu_N\left(S_{[0,N]} \subset B(x_N(\omega), (\varrho_0 + \epsilon)N^{\frac{1}{d+2}})\right) \to 1, \quad N \to \infty. \qquad \text{(confinement)}$$

講演者は [4] において $S_{[0,N]}$ が $B(\omega)$ をほとんど埋め尽くしていることを示した：

$$\forall \epsilon > 0, \quad \mu_N\left(\left|N^{-\frac{d}{d+2}}|S_{[0,N]}| - |B(0,\varrho_0)|\right| > \epsilon\right) \to 0, \quad N \to \infty.$$

今回報告する一つ目の結果は，「ほとんど」を「境界の近くを除いて全て」に改善するものである．これは [2] で予想として述べられていたものである．

Theorem 1. *Confinement property* と同じ x_N と任意の $\epsilon > 0$ に対して，

$$\mu_N\left(S_{[0,N]} \supset B(x_N(\omega), (\varrho_0 - \epsilon)N^{\frac{1}{d+2}})\right) \to 1, \quad N \to \infty. \qquad \text{(covering)}$$

Remark. この定理に関しては最近 Berestycki–Cerf [1] が同じ結果を発表した．ただしそこでの問題の定式化は障害物を使わないもので, 従って証明の方法も異なっている．例えば我々の議論は (confinement) を (おそらく必要ないものの現時点では) 仮定しているが, 彼らは (covering) を独立に示す．実は Bolthausen の論文 [2] は，(covering) から (confinement) を導く構成になっており，[1] はその方針を $d \ge 3$ でも完遂しようとしている．

[1] E-mail:ryoki@kurims.kyoto-u.ac.jp

[2] これに対して媒質は固定した場合を quenched という．

上の (confinement) と (covering) によりランダムウォークの軌跡は漸近的に（中身の詰まった）球であることが分かる．二つ目の結果は軌跡の表面積が $\log N$ の冪の因子を除いて $B(x_N(\omega), \varrho_0 N^{\frac{1}{d+2}})$ の表面積と一致することを示すものである．

Theorem 2. ある $a > 0$ が存在して

$$\mu_N \left(|\partial S_{[0,N]}| \le N^{\frac{d-1}{d+2}} (\log N)^a \right) \to 1, \quad N \to \infty.$$

界面の揺らぎの問題として見るならば，表面積より $\partial S_{[0,N]}$ と $\partial B(x_N(\omega), \varrho_0 N^{\frac{1}{d+2}})$ の Hausdorff 距離などを考察する方が自然であるが，それははるかに難しい問題のように思われる．

最後に技術的な側面について少し言及しておく．このモデルの研究は 1990 年代に Sznitman が「障害物の拡大」と呼ばれる多重スケール解析によってランダム作用素の固有値を評価する方法でかなり進展させた．この方法は実際の適用に際して確率論的な考察を伴うことが多いものの，原理的には解析的なものである．一方で今回の結果を導くために用いた手法はその本質において組合せ論的であり，この種の問題の研究としては目新しいところがあると思われるので，講演ではできるだけそこに焦点を当てたい．

References

[1] N. Berestycki and R. Cerf. The random walk penalised by its range in dimensions $d \ge 3$. arXiv:1811.04700.

[2] E. Bolthausen. Localization of a two-dimensional random walk with an attractive path interaction. *Ann. Probab.* 22, 875–918, 1994.

[3] J. Ding, R. Fukushima, R. Sun and C. Xu. Geometry of the random walk range conditioned on survival among Bernoulli obstacles. arXiv:1806.08319

[4] R. Fukushima. Asymptotics for the Wiener sausage among Poissonian obstacles. *J. Stat. Phys.* 133, 639–657, 2008.

[5] T. Povel. Confinement of Brownian motion among Poissonian obstacles in $\mathbb{R}^d, d \ge 3$. *Probab. Theory Related Fields* 114, 177–205, 1999.

[6] A.-S. Sznitman. On the confinement property of two-dimensional Brownian motion among Poissonian obstacles. *Comm. Pure Appl. Math.* 44, 1137–1170, 1991.

A limit theorem for persistence diagrams of random complexes built over marked point processes [*1]

九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所 学術研究員　須崎 清剛[*2]

ある現象を観測して得られたデータの多くは，Euclid 空間内の有限集合として表現される．いま，初期時刻でデータが入力され，時刻 t で各データ点を中心とする半径 t の閉球を与える．すなわち，時間とともに各データ点を太らせていく過程を考える．この過程は，データ集合を様々な解像度で解析していると見なすこともできる．各時刻で閉球の和とホモトピー同値な脈体を対応させたとき，単体複体の増大列が得られるが，横軸を発生（birth）時刻，縦軸を消滅（death）時刻として，その増大列中の q 次ホモロジー類の発生・消滅を $\Delta = \{(x, y) \in [0, \infty]^2 : 0 \le x < y \le \infty\}$ 上にプロットした図は，q 次パーシステンス図と呼ばれる．

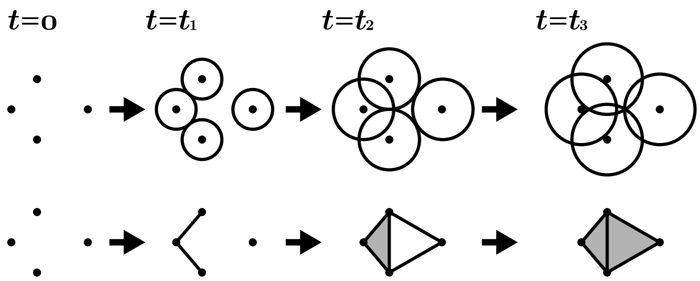

図 1　下部は閉球の和の脈体（Čech 複体）

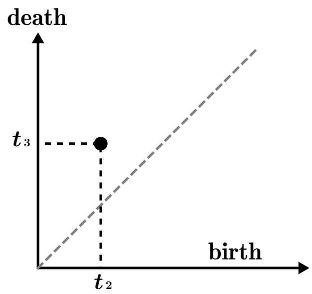

図 2　1 次パーシステンス図

本講演では，マーク付き点過程に対してある規則で単体複体の増大列を対応させた際のパーシステンス図について考える．本研究は，九州大学の白井朋之氏との共同研究に基づく．

集合 S に対して $\mathcal{F}(S)$ を S の非空の有限部分集合全体とし，$\mathbb{M}$ を Polish 空間とする．$\kappa : \mathcal{F}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{M}) \to [0, \infty]$ は次の条件 (K1), (K2) をみたすとする．

(K1) $A \subset B$ ならば $\kappa(A) \le \kappa(B)$.

(K2) 単調非減少な $\rho : [0, \infty] \to [0, \infty]$ が存在して，$t < \infty$ ならば $\rho(t) < \infty$ をみたし，すべての $(x, m), (y, n) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{M}$ に対して，$|x - y| \le \rho(\kappa(\{(x, m), (y, n)\}))$ が成立する．

また，場合によって κ には以下の平行移動・回転不変性を仮定する．

(T) すべての $x \in \mathbb{R}^d$ に対して，$\kappa(T_x A) = \kappa(A)$ が成り立つ．ここで，$T_x : \mathcal{F}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{M}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{M})$ は $T_x A = \{(y + x, m) : (y, m) \in A\}$ である．

(R) すべての $U \in O(d)$ に対して，$\kappa(R_U A) = \kappa(A)$ が成り立つ．ここで，$O(d)$ は d 次直交行列全体，$R_U : \mathcal{F}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{M}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{M})$ は $R_U A = \{(Ux, m) : (x, m) \in A\}$ である．

$\pi : \mathbb{R} \times \mathbb{M} \to \mathbb{R}$ を標準射影とする．$\tilde{\Xi} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{M})$ が単純であるとは，$\pi|_{\tilde{\Xi}}$ が単射となるときをいい，このとき $\Xi = \pi(\tilde{\Xi})$ と表す．単純な $\tilde{\Xi} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{M})$ に対しては，π により自然な全単射 $\mathcal{F}(\tilde{\Xi}) \ni \tilde{\sigma} \mapsto \sigma \in \mathcal{F}(\Xi)$ が誘導され，各 $\tilde{\sigma} = \{(x_0, m_0), (x_1, m_1), \ldots, (x_q, m_q)\}$ は，$\mathbb{R}^d$ 内の有限点配置 $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_q\}$ にマーク $\{m_0, m_1, \ldots, m_q\}$ が付加されていると見なせる．単純な $\tilde{\Xi} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{M})$ が与えられたとき，抽象単体複体の増大列 $\mathbb{K}(\tilde{\Xi}) = \{K(\tilde{\Xi}, t)\}_{t \ge 0}$ を

$$K(\tilde{\Xi}, t) = \{\sigma \subset \Xi : \kappa(\tilde{\sigma}) \le t\}$$

[*1] 本研究は，JST CREST JPMJCR15D3 の支援を受けたものである．

[*2] k-suzaki@imi.kyushu-u.ac.jp

で定める．すなわち $\kappa(\tilde{\sigma})$ は，$\mathbb{K}(\tilde{\Xi})$ における単体 σ の発生時刻である．$\mathbb{K}(\tilde{\Xi})$ を κ-フィルトレーションと呼ぶ．κ の基本的な例については，講演中に述べる．

非負整数 q に対して，$H_q(K(\tilde{\Xi},t))$ を体上の $K(\tilde{\Xi},t)$ の q 次ホモロジー群とし，$r \le s$ に対して，$\iota_r^s : H_q(K(\tilde{\Xi},r)) \to H_q(K(\tilde{\Xi},s))$ を包含写像 $K(\tilde{\Xi},r) \hookrightarrow K(\tilde{\Xi},s)$ から誘導される線形写像とする．$H_q(\mathbb{K}(\tilde{\Xi})) = (\{H_q(K(\tilde{\Xi},t))\}_{t\ge 0}, \{\iota_r^s\}_{r\le s})$ は，q 次パーシステントホモロジー群と呼ばれる．単項イデアル整域上の次数付き加群の構造定理により，$H_q(\mathbb{K}(\tilde{\Xi}))$ は区間分解

$$H_q(\mathbb{K}(\tilde{\Xi})) \simeq \bigoplus_{i=1}^{n_q} I(b_i, d_i)$$

をもつことが知られている ([2])．ここで $I(b_i,d_i)$ は，ある q 次ホモロジー類が $\mathbb{K}(\tilde{\Xi})$ において $t=b_i$ で発生し，$b_i \le t < d_i$ 間で持続し，$t=d_i$ で消滅することを表している．多重集合 $D_q(\tilde{\Xi}) = \{(b_i,d_i) \in \Delta : i=1,2,\dots,n_q\}$ を q 次パーシステンス図という．我々は $D_q(\tilde{\Xi})$ を数え上げ測度

$$\xi_q(\tilde{\Xi}) = \sum_{(b_i,d_i)\in D_q(\Xi)} \delta_{(b_i,d_i)}$$

と同一視し，パーシステンス図の収束を Radon 測度の漠収束で考える．

$\tilde{\Phi}$ は $\mathbb{R}^d \times \mathbb{M}$ 上の点過程であって，$\mathbb{R}^d$ へ射影した点過程 $\Phi(\cdot) = \tilde{\Phi}(\cdot \times \mathbb{M})$ が $\mathbb{R}^d$ 上の単純点過程となるとき，$\mathbb{M}$ をマーク空間とする $\mathbb{R}^d$ 上のマーク付き点過程であるという．作用 $\{T_x\}_{x\in\mathbb{R}^d}$ と $\{R_U\}_{U\in O(d)}$ は，$\mathbb{R}^d \times \mathbb{M}$ 上の配置空間へ自然な作用を与えるが，$\tilde{\Phi}$ に対する定常性とエルゴード性，および等方性は，これら作用に関するものとして定義される．また，Φ が全有限モーメントをもつとは，$\mathbb{R}^d$ の任意の有界な Borel 可測集合 A と $p \ge 1$ に対して，$\mathbb{E}[\Phi(A)^p] < \infty$ が成り立つときをいう．各 $L>0$ に対して，$\Lambda_L = [-L/2, L/2)^d \times \mathbb{M}$ とおく．$\tilde{\Phi}$ から定まるランダムな κ-フィルトレーション $\mathbb{K}(\tilde{\Phi}|_{\Lambda_L}) = \{K(\tilde{\Phi}|_{\Lambda_L}, t)\}_{t\ge 0}$ に対応する q 次パーシステンス図 $\xi_q(\tilde{\Phi}|_{\Lambda_L})$ を，簡単に $\xi_{q,L}$ と表す．多次元エルゴード定理を応用して，次のことを示すことができる．

定理 1. κ は (T) をみたし，$\tilde{\Phi}$ は定常マーク付き点過程で，その $\mathbb{R}^d$ への射影点過程 Φ は全有限モーメントをもつと仮定する．このとき各 $q \ge 0$ に対して，Δ 上の Radon 測度 ν_q が存在して，$L \to \infty$ のとき $\mathbb{E}[\xi_{q,L}]/L^d \xrightarrow{v} \nu_q$ が成立する．ここで $\xrightarrow{v}$ は漠収束を表す．さらに κ は (R)をみたし, $\tilde{\Phi}$ がエルゴード的で等方的であれば, ほとんど確実に $L \to \infty$ のとき

$$\frac{1}{L^d}\xi_{q,L} \xrightarrow{v} \nu_q$$

が成立する．

証明は，点過程のパーシステンス図の極限定理について論じている [1] で用いられている手法を，マーク付き点過程版へ拡張して行う．

参考文献

[1] Y. Hiraoka, T. Shirai and K. D. Trinh, *Limit theorems for persistence diagrams*, Ann. Appl. Probab. **28** (2018) 2740–2780.

[2] A. Zomorodian and G. Carlsson, *Computing persistent homology*, Discrete Comput. Geom. **33** (2005) 249–274.

Fluctuation results in First-passage percolation

中島秀太* 京都大学 数理解析研究所　博士後期課程 3 年

キーワード：First-passage percolation, optimization problem, random environment

First-passage percolation は Hammersley と Welsh により 1965 年に導入された動的な浸透モデルである。モデルは次のように定義される。隣接している $\mathbb{Z}^d$ の二点をつなぐ辺の全体を $E(\mathbb{Z}^d)$ で表す。各辺 $e \in E(\mathbb{Z}^d)$ には、その辺を通過するのに必要な時間を表す独立で同一分布に従う非負確率変数 τ_e が与えられているとする。また、$\mathbb{Z}^d$ の辺を $e_1 \to \cdots \to e_k$ の順にたどる路 π の移動時間を $t(\pi) = \sum_{i=1}^k \tau_{e_i}$ で定義する。さらに二点 $x, y \in \mathbb{Z}^d$ 間の最小移動時間を次で定義する:

$$T(x,y) := \inf\{t(\pi) :\ \pi は x から y への路\}.$$

物理的には τ_e は e の浸透に要する時間、$T(0,x)$ は液体の浸透領域が x に到達するまでの時間、$B(t) = \{x \in \mathbb{R}^d | T(0,[x]) \le t\}$ は時刻 t での浸透領域を表す。

本講演では浸透領域 $B(t)$ の揺らぎの大きさについて議論する。

Definition 1. 次を満たす時、τ の分布が適切であると言う*:*

$$\mathbb{P}(\tau_e = \underline{\tau}) < \begin{cases} p_c(d) & \textit{if } \underline{\tau} = 0, \\ \vec{p}_c(d) & \textit{otherwise}, \end{cases}$$

ここで $\underline{\tau}$ は τ_e の分布の *support* の下限、$p_c(d), \vec{p}_c(d)$ はそれぞれ d 次元 *percolation* モデル、d 次元 *oriented percolation* モデルの臨界確率である。

次に浸透領域 $B(t)$ の揺らぎの大きさを定義する。

Definition 2. 任意の $l > 0$ と任意の集合 $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ について、

$$\Gamma_l^- = \{v \in \Gamma |\ d(v, \Gamma^c) \ge l\} \ \textit{and}\ \Gamma_l^+ = \{v \in \mathbb{R}^d |\ d(v, \Gamma) \le l\},$$

と定める。ここで d はユークリッド距離。与えられた集合 $A, B \subset \mathbb{R}^d$ に対して、B に対する A の揺らぎの大きさを次で定義する*:*

$$F(A,B) = \inf\{\delta > 0 |\ B_\delta^- \subset A \subset B_\delta^+\}.$$

Theorem 1. *F が適切で指数モーメント有限であるとする。このときある $c, C > 0$ が存在して任意の $t > 0$ と任意の原点を含む凸集合 $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ について、次が成り立つ。*

$$\mathbb{P}(F(B(t), \Gamma) \le c \log t) \le C \exp(-t^c).$$

本講演では研究の背景や動機を説明するとともに、証明で用いるアイデアについても議論する予定である。

参考文献

[1] Shuta Nakajima　Divergence of shape fluctuation for general distributions in first passage percolation　arXiv:1706.03493.

*njima@kurims.kyoto-u.ac.jp