不連続ドリフト係数を持つ
確率微分方程式に対する近似

Arturo Kohatsu-Higa [1], Antoine Lejay [2], 安田 和弘[3].

1 Introduction

次のような d 次元確率微分方程式を考える：

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \quad X_0 = x. \tag{1}$$

但し、b, σ は適当な関数、B_t は d 次元ブラウン運動とする。この解 X_T ($T > 0$) に対して、期待値 $E[f(X_T)]$ を考える。但し、f は適当な関数とする。この期待値が具体的に計算出来ることは少ない。そのため、数値を得たいとき、シミュレーションを行い、近似値で代用される。そのシミュレーションの際に 2 種類の近似が必要となる。

(i). 1 つ目は確率分方程式 (1) に対して近似をしてやる必要がある。代表的な近似の方法として次のようなオイラー・丸山近似がある：

$$\bar{X}_t = x + \int_0^t b(\phi(s), \bar{X}_{\phi(s)})ds + \int_0^t \sigma(\phi(s), \bar{X}_{\phi(s)})dB_s,$$

但し、$\phi(s) = \sup\{t \leq s | t = \frac{k}{n} \text{ for } k \in \mathbb{N}\}$ とする。

(ii). 2 つ目は期待値に対する近似が必要である。これに関しては大数の法則を基としたモンテカルロ法が代表的である。

本講演では、前者の (i) に関して考える。特に、ドリフト係数 b が不連続関数の場合の弱近似の収束のオーダーについて考察する。ここで、X_T の近似過程 $\tilde{X}_T$ がオーダー γ の弱近似とは、適当な関数の族に属する関数 f に対して、

$$\left| E\left[f(X_T)\right] - E\left[f\left(\tilde{X}_T\right)\right]\right| \leq C\Delta t^\gamma$$

が成り立つことである。但し、C は正の定数とする。

---

[1]立命館大学理工学部 and JST.
[2]Project-team TOSCA (INRIA) and IECN.
[3]法政大学理工学部（k_yasuda@hosei.ac.jp）.

2 Main Theorems

Assumption 2.1 **(i).** $\sigma :$ を $[0,T]\times\mathbb{R}^d$ 上の $d\times d$-対称行列値一様連続関数で、次を満たす定数 $\Lambda\geq\lambda>0$ が存在するとする：

$$\lambda|\xi|^2\leq\xi^*\sigma\sigma^*(t,x)\xi\leq\Lambda|\xi|^2,\quad \text{for all } \xi\in\mathbb{R}^d \text{ and } (t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d.$$

(ii). b を $[0,T]\times\mathbb{R}^d$ 上の有界な d 次元可測関数とする。また、b_ε（b に対する近似関数）を $[0,T]\times\mathbb{R}^d$ 上の有界な d 次元可測関数とする。

以下、Assumption 2.1 を仮定する。また、X_t^ε を (1) のドリフト係数を b_ε で置き換えたものとし、$\bar{X}_t^\varepsilon$ をそのオイラー・丸山近似したものとする。

Theorem 2.2 次が成り立つと仮定する：

(i). $\gamma>0$ に対して、$|E[f(X_T)]-E[f(X_T^\varepsilon)]|=O(\varepsilon^\gamma)$.

(ii). $\beta,\delta>0$ に対して、$|E[f(X_T^\varepsilon)]-E[f(\bar{X}_T^\varepsilon)]|=O(\frac{1}{\varepsilon^\beta n^\delta})$.

このとき、$\varepsilon=O(n^{-\frac{\delta}{\gamma+\beta}})$ に対して、次が成り立つ：

$$\left|E[f(X_T)]-E\left[f\left(\bar{X}_T^\varepsilon\right)\right]\right|\leq O\left(n^{-\frac{\delta\gamma}{\gamma+\beta}}\right).$$

$C_{Sl}(\mathbb{R}^d)=\{f\in C(\mathbb{R}^d):\ \forall k>0,\ \lim_{|x|\to\infty}|f(x)|e^{-k|x|^2}=0\}$ とする。

Proposition 2.3 $\alpha,\ p>2$ ($\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{p}<\frac{1}{2}$) とする。$f\in C_{Sl}(\mathbb{R}^d)$ に対して、

$$|E\left[f(X_T)\right]-E\left[f\left(X_T^\varepsilon\right)\right]|\leq C(\alpha,p,T)A_T(\varepsilon)\sqrt{Var(f(X_T))}$$

が成り立つ。但し、$C(\alpha,p,T)$ は正の定数で、

$$A_T(\varepsilon)=E\left[\int_0^T|b_\varepsilon(s,Y_s)-b(s,Y_s)|^p\,ds\right]^{\frac{1}{p}},$$

但し、Y_t は $Y_t=x+\int_0^t\sigma(s,Y_s)dW_s$ の解とする。

Theorem2.2 の **(ii)** に関しては、例えば、Mikulevicius and Platen (1991) の結果を用いることが出来る。

1 次元（$d=1$）かつ拡散係数が定数（$\sigma(t,x)=\sigma$）の場合、オイラー・丸山近似に対する弱近似のオーダーが次のように得られる。

Theorem 2.4 $b(x)$ は有界かつ $\cup_{i=1}^{M-1}(x_i,x_{i+1})$ の上で *Lipschitz* 連続、各 x_i では両極限が存在するとする。このとき、$f\in C_p^3$ と $p>2$ に対して、次が成り立つ：

$$\left|E[f(X_T)]-E[f(\bar{X}_T)]\right|=O\left(n^{-\frac{1}{p+1}}\right).$$