Random walk on non-intersecting two-sided random walk trace is subdiffusive in low dimensions

白石大典

京都大学数理解析研究所博士課程 2 年

1 背景

$S=(S(n))_{n\ge 0}$ を原点から出発する $\mathbb{Z}^d$ $(d=2,3)$ 上のシンプルランダムウォーク (SRW) とする。ふたつの整数 $0\le k<n$ を取る。時刻 k が時刻 n までのカットタイムであるとは、

$$S[0,k]\cap S[k+1,n]=\emptyset$$

を満たすこととする。ここで $S[0,k]=\{S(j):0\le j\le k\}$ である。その事象の指示関数 Y_k を

$$Y_k:=\mathbf{1}\{S[0,k]\cap S[k+1,n]=\emptyset\}$$

で定義する。このとき Lawler([2]) はある定数 ζ_d が存在して、

$$P\big(S[0,n]\cap S[n+1,2n]=\emptyset\big)\asymp n^{-\zeta_d}$$
$$E\Big(\sum_{k=0}^{n}Y_k\Big)\asymp n^{1-\zeta_d}$$

が成立することを示した。ここで ζ_d は intersection exponent と呼ばれる指数である。その後 Lawler、Schramm そして Werner([3]) らにより

$$\zeta_2=\frac{5}{8} \tag{1.1}$$

であることが証明された。ζ_3 の値は今のところわかっていない。最良の評価として $\frac{1}{4}<\zeta_3<\frac{1}{2}$ であることが知られている。

このようにカットタイムの個数については理解が進んでいる一方で、連続するカットポイントの間の SRW のパスの構造や、カットポイントの近傍におけるパスの特異性といった幾何学的構造の研究は全く進んでいない。そこで講演者は以下のような問題を考察した。「時刻 n が時刻 $2n$ までのカットタイムであると条件付けた時、$S(n)$ の周りにおける SRW のパスはどのような構造をしているのか？」S^1,S^2 を $\mathbb{Z}^d$ 上の原点から出発する独立な SRW とする。このとき SRW の時間反転に関する対称性と平行移動不変性からこの問題は以下のように帰着される。

(Q) $S^1[0,n]\cap S^2[1,n]=\emptyset$ と条件付けた時 S^1 と S^2 のパスは原点近傍でどのような構造をしているか？

上の問題において $n\to\infty$ とすると以下のふたつの問題が生じる。まず第一の問題は $S^1[0,\infty)\cap S^2[1,\infty)=\emptyset$ と条件付けられた two-sided RW の構成である。両者が出発後永久に交わらない確率は $d=2,3$ の場合 0 なので、その構成は自明な問題ではない。なおブラウン運動に対しては出発後 2 度と交わらないように条件付けられた two-sided パスが既に構成されている ([1, 4])。しかしながらその構成においてブラウン運動のスケーリング則を本質的に用いているため、そこでの手法を SRW に対してそのまま適用することはできない。

2 結果

事象 A_n を

$$A_n = \{S^1[0,n] \cap S^2[1,n] = \emptyset\} \tag{2.1}$$

と定義する。最初の定理は構成に関するものである ([5])。

Theorem 1: Let $d = 2$ or 3. Then the following limit exists;

$$\lim_{n\to\infty} P\Big(\cdot \ \Big|\ A_n\Big) =: P^\star(\cdot). \tag{2.2}$$

Moreover, $P^\star$ extends uniquely to a probability measure on the configurations of infinite non-intersecting two-sided paths.

確率測度 $P^\star$ に従う two-sided RW を $\overline{S}^1, \overline{S}^2$ とする。$\overline{\mathcal{G}} = \overline{S}^1[0,\infty) \cup \overline{S}^2[0,\infty)$ をその軌跡とする。ここでの目標は $\overline{\mathcal{G}}$ と通常の two-sided SRW の軌跡 $\mathcal{G} = S^1[0,\infty) \cup S^2[0,\infty)$ の違いを明らかにすることである。以下この問題を 2 次元の場合に限り考察する。この場合は $\mathcal{G} = \mathbb{Z}^2$ となる。

時刻 k が $\overline{S}^i$ のグローバルカットタイムであるとは $\overline{S}^i[0,k] \cap \overline{S}^i[k+1,\infty) = \emptyset$ が成立することとする。$\overline{J}^i(k) := \mathbf{1}\{\overline{S}^i[0,k] \cap \overline{S}^i[k+1,\infty) = \emptyset\}$ をその事象の指示関数とせよ。

X を $\overline{\mathcal{G}}$ 上の原点から出発する SRW とする。X が半径 n の円の外に出る最初の時刻を $T(n) = \inf\{k \geq 0 : |X(k)| \geq n\}$ とする。また P_0^ω を X の quenched law、E_0^ω を P_0^ω に関する平均とする。(ω は $\overline{\mathcal{G}}$ のランダムネスを表わす。)

次の定理は $\overline{\mathcal{G}}$ と $\mathbb{Z}^2$ との違いを述べたものである ([6])。

Theorem 2: Let $d = 2$. The following holds for $P^\star$-a.s. ω.

(i) For each $i = 1, 2$, we have

$$\sum_{k=0}^{n} \overline{J}^i(k) = n^{\frac{3}{8}+o(1)} \ (\text{as } n \to \infty). \tag{2.3}$$

In particular, both $\overline{S}^1$ and $\overline{S}^2$ have infinitely many global cut times.

(ii) For all $\epsilon \in (0, \frac{1}{100})$, we have

$$E_0^\omega\big(T(n)\big) \geq n^{\frac{81}{40}-\epsilon}, \tag{2.4}$$

for large n.

2 次元の場合、通常の SRWS^i はグローバルカットタイムをひとつも持たないことに注意せよ。(ii) は X の subdiffusivity を quenched level で述べている。本講演では (ii) がなぜ成立するのかを中心に説明したい。

References

[1] Gregory F. Lawler. Nonintersecting planar Brownian motions. Math. Phys. Electron. J. 1 (1995), Paper 4, approx. 35 pp. (electronic).

[2] Gregory F. Lawler. Cut times for simple random walk. Electron. J. Probab. 1 (1996), no. 13, approx. 24 pp. (electronic).

[3] Gregory F. Lawler, Oded Schramm, Wendelin Werner. Values of Brownian intersection exponents. II. Plane exponents. Acta Math. 187 (2001), no. 2, 275-308.

[4] Gregory F. Lawler, Brigitta Vermesi. Fast convergence to an invariant measure for non-intersecting 3-dimensional Brownian paths. (2010) preprint, available at http://arxiv.org/abs/1008.4830

[5] Daisuke Shiraishi. Two-sided random walks conditioned to have no intersections. (2011) preprint, available at http://arxiv.org/abs/1106.529

[6] Daisuke Shiraishi. Random walk on non-intersecting two-sided random walk trace is subdiffusive in low dimensions. Trans. Amer. Math. Soc., to appear.