自由確率論における積の極限定理

佐久間 紀佳 (愛知教育大学)

本講演はお茶の水女子大学の吉田裕亮氏との共同研究に基づく. 自由確率論において新しい自由乗法畳み込みに関連する極限定理を発見した. その極限定理は自由独立変数の積と和を同時に増やしていく形のものである.

1. 準備

$\boxplus, \boxtimes, \uplus$ をそれぞれ自由加法畳み込み, 自由乗法畳み込み, Boolean 加法畳み込みとする. これらはそれぞれ確率論における (加法) 畳み込み $*$ 及び乗法畳み込み $\circledast$ の自由独立および Boolean 独立の下での対応物である.

$c > 0$ とする. $\mathbb{R}$ 上確率測度 μ に対して, dilation 作用素 D_c を次のように定義する:

$$D_c(\mu)(B) := \mu\left(\frac{1}{c}B\right), \quad B\text{: ボレル集合.}$$

次に本講演で用いる解析的道具について紹介する (逆元をとるときはそれぞれ適当な領域に制限する):
μ を $\mathbb{R}$ 上のボレル確率測度とする.

- コーシー変換: $G_\mu(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z-x}\mu(dx)$,
- $G_\mu^{-1}(z)$: コーシー変換 $G_\mu(z)$ の合成についての右逆元,
- $\mathcal{R}$–変換: $\mathcal{R}_\mu(z) = G_\mu^{-1}(z) - 1/z$.

命題 1.1 (Voiculescu)**.**

$$\mathcal{R}_{\mu\boxplus\nu}(z) = \mathcal{R}_\mu(z) + \mathcal{R}_\nu(z)$$

ρ を $[0,\infty)$ 上のボレル確率測度とする.

- モーメント母関数: $M_\rho(z) := \int_{\mathbb{R}_+} \frac{zx}{1-zx}\rho(dx)$,
- $M_\rho^{-1}(z)$: モーメント母関数 $M_\rho(z)$ の合成についての右逆元,
- S–変換: $S_\rho(z) := \frac{1+z}{z}M_\rho^{-1}(z)$,
- Σ–変換: $\Sigma_\rho(z) = S_\rho\left(\frac{z}{1-z}\right)$.

命題 1.2 (Voiculescu (1988) Belinschi and Nica(2008))**.** (1) $[0,\infty)$ 上のボレル確率測度 ρ_1, ρ_2 に対して,

$$S_{\rho_1\boxtimes\rho_2}(z) = S_{\rho_1}(z)S_{\rho_2}(z).$$

(2) $[0,\infty)$ 上のボレル確率測度 ρ に対して,

$$S_{D_c(\rho)}(z) = \frac{1}{c}S_\rho(z), \quad S_{\rho^{\boxplus t}}(z) = \frac{1}{t}S_\rho\left(\frac{z}{t}\right).$$

(3) $[0,\infty)$ 上のボレル確率測度 ρ に対して,

$$\Sigma_{D_c(\rho)}(z) = \frac{1}{c}\Sigma_\rho(z), \quad \Sigma_{\rho^{\uplus t}}(z) = \frac{1}{t}\Sigma_\rho\left(\frac{z}{t}\right).$$

Date: 平成２３年１２月２１日.

2. 結果

補題 2.1. (1) $[0,\infty)$ 上のボレル確率測度 ρ は $\rho\neq\delta_0$ で p 次モーメントを持つとする. ρ の S–変換は次の Taylor 展開をもつ:

$$S_\rho(z)=\sum_{k=0}^{p-1}s_k(\rho)z^{k+1}+o(z^p),\quad z\overset{z\in\mathfrak{D}_\rho}{\longrightarrow}0.$$

加えて, $s_0=1/m_1(\rho)$, $s_1(\rho)=\frac{1}{m_1(\rho)}-\frac{m_2(\rho)}{(m_1(\rho))^3},\ldots$.

(2) $[0,\infty)$ 上のボレル確率測度 ρ は $\rho\neq\delta_0$ かつ p 次モーメントをもつとする. ρ の Σ–変換は次の Taylor 展開をもつ:

$$\Sigma_\rho(z)=\sum_{k=0}^{p-1}\sigma_k(\rho)z^{k+1}+o(z^p),\quad z\overset{z\in\mathfrak{D}_\rho}{\longrightarrow}0.$$

加えて, $\sigma_0=1/m_1(\rho)$, $\sigma_1(\rho)=\frac{1}{m_1(\rho)}-\frac{m_2(\rho)}{(m_1(\rho))^3}$.

定理 2.2. $\alpha=\frac{\mathrm{Var}(\rho)}{(m_1(\rho))^2}$ とする. 二次モーメントをもつ $[0,\infty)$ 上のボレル確率測度 ρ に対して, $[0,\infty)$ 上のボレル確率測度 $\mathfrak{y}_\alpha\in\mathcal{P}_+$ が存在して次をみたす:

$$D_{s_0^N/N}\left(\left(\rho^{\boxtimes N}\right)^{\boxplus N}\right)\xrightarrow{d}\mathfrak{y}_\alpha,\quad as\ N\to\infty.$$

さらに, $[0,\infty)$ 上のボレル確率測度 $\mathfrak{s}_\alpha\in\mathcal{P}_+$ が存在して次をみたす:

$$D_{s_0^N/N}\left(\left(\rho^{\boxtimes N}\right)^{\uplus N}\right)\xrightarrow{d}\mathfrak{s}_\alpha,\quad as\ N\to\infty.$$

注意 2.3. Boolean 畳み込みと自由乗法畳み込みのケースについては自由ポアソン分布の場合について Młowtkowski (2010) により既に指摘されている.

命題 2.4. 以下は同値:

(1) $\mathbb{R}$ 上のボレル確率測度 μ は自由無限分解可能分布. すなわち, 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対してある $\mu_n\in\mathcal{P}$ が存在して以下をみたす:

$$\mu=\underbrace{\mu_n\boxplus\cdots\boxplus\mu_n}_{n\ times}.$$

(2) 一意な $b_\mu\in\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}$ 上の有限測度 ν_μ が存在して次をみたす:

$$\mathcal{R}_\mu(z)=b_\mu+\int_{\mathbb{R}}\frac{z}{1-tz}\nu_\mu(\mathrm{d}t),\quad z\in\mathbb{C}^-.$$

定理 2.5. (1) $W_0(z)$: ランベルトの W–関数. すなわち $z=we^w$ の逆関数の主値.

$$\mathcal{R}_{\mathfrak{y}_\alpha}(z)=\frac{-W_0(-\alpha z)}{\alpha z}.$$

(2) $\mathfrak{y}_\alpha$ は $\boxplus$–無限分解可能かつ $\boxtimes$–無限分解可能.

(3) $\mathfrak{y}_\alpha$ のレヴィ測度 $\nu_{\mathfrak{y}_\alpha}$ は確率密度になっている:

$$\nu_{\mathfrak{y}_\alpha}(ds)=\frac{1}{\alpha\pi}sf^{-1}(\alpha/s)1_{[0,\alpha e]}(s)ds,$$

ここで $f(u)=u\csc(u)\exp(-u\cot(u))$.

(4) $\mathfrak{y}_\alpha$ の自由キュムラント列 ($\mathcal{R}$–変換をテイラー展開したときの係数列) は $\left\{\dfrac{(\alpha n)^{n-1}}{n!}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.

(5)

$$\mathfrak{y}_\alpha^{\boxplus t}=D_t(\mathfrak{y}_\alpha^{\boxtimes 1/t}),$$
$$\mathfrak{y}_\alpha^{\boxtimes t}=D_t(\mathfrak{y}_\alpha^{\boxplus 1/t}).$$