COE 行列の行列成分に関するモーメントの計算法

松本 詔 (名古屋大学・多元数理)
sho-matsumoto@math.nagoya-u.ac.jp

Dyson により導入された 3 つのクラスの円アンサンブル (COE, CUE, CSE) の一つ，円直交アンサンブル (circular orthogonal ensemble, COE) について考察する．$N \times N$ の COE 行列 V は，対称ユニタリ行列の値をとるランダム行列であり，次の性質により特徴付けられる: 「固定された $N \times N$ ユニタリ行列 U_0 に対し，V と ${}^tU_0VU_0$ は同分布」．特に U_0 として実直交行列を選ぶことで，V の分布は直交変換で不変なことが分かる．

$V = (v_{ij})_{1 \le i,j \le N}$ を $N \times N$ の COE 行列とする．添字の列 $\boldsymbol{i} = (i_1, i_2, \dots, i_{2k}), \boldsymbol{j} = (j_1, j_2, \dots, j_{2k}) \in \{1, 2, \dots, N\}^{\times 2k}$ に対して，

$$M_N(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}) = \mathbb{E}[v_{i_1i_2}v_{i_3i_4} \cdots v_{i_{2k-1}i_{2k}}\overline{v_{j_1j_2}v_{j_3j_4} \cdots v_{j_{2k-1}j_{2k}}}]$$

とおく．$M_N(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ は，どのように計算したら良いであろうか．ガウス型行列 (GOE など) に対してこの問題は，良く知られているように「Wick の公式」を用いることで解決される．COE の場合に対応する公式を得たことが今回の主結果である．

定理 1 ([Mat]). 上の記号の下で，$M_N(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ は次のように表示される．

$$M_N(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}) = \sum_{\substack{\sigma \in S_{2k} \\ \boldsymbol{j} = \boldsymbol{i}^\sigma}} \mathrm{Wg}_k^O(\sigma; N+1).$$

上の式の和は，

$$\boldsymbol{j} = \boldsymbol{i}^\sigma := (i_{\sigma(1)}, i_{\sigma(2)}, \dots, i_{\sigma(2k)})$$

を満たす置換 $\sigma \in S_{2k}$ 全体を走る．また $S_{2k} \ni \sigma \mapsto \mathrm{Wg}_k^O(\sigma; N+1)$ は $2k$ 次対称群 S_{2k} 上の関数であり，直交 *Weingarten* 関数と呼ばれるものである（定義は後述する．上添字の O は「直交 *(orthogonal)*」を表す）．

CUE における同様の公式は既に知られており,「ユニタリ Weingarten 関数」が必要とされる．

例 1. $\mathbb{E}[|v_{12}v_{13}|^2]$ を計算しよう．上の記号で，$\mathbb{E}[|v_{12}v_{13}|^2] = M_N(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i})$, $\boldsymbol{i} = (1, 2, 1, 3)$ となる．$\boldsymbol{i}^\sigma = \boldsymbol{i}$ を満たす $\sigma \in S_4$ は，恒等置換 $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ と互換 $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ の *2* つである．このとき $\mathrm{Wg}_2^O(\sigma; N+1)$ の値は簡単に求まり，それぞれ $\frac{N+2}{N(N+1)(N+3)}, \frac{-1}{N(N+1)(N+3)}$ である．したがって,

$$\mathbb{E}[|v_{12}v_{13}|^2] = \frac{N+2}{N(N+1)(N+3)} + \frac{-1}{N(N+1)(N+3)} = \frac{N-1}{N(N+1)(N+3)}$$

を得る．

系 **2.** $V=(v_{ij})_{1\le i,j\le N}$ を $N\times N$ の *COE* 行列とする．対角成分 v_{ii} と非対角成分 v_{ij} $(i\neq j)$ のモーメントは具体的に次のように与えられる．任意の正整数 k に対し，

$$\mathbb{E}[|v_{ii}|^{2k}] = \frac{2^k k!}{(N+1)(N+3)(N+5)\cdots(N+2k-1)}.$$
$$\mathbb{E}[|v_{ij}|^{2k}] = \frac{k!}{N(N+1)(N+2)\cdots(N+k-2)(N+2k-1)}.$$

また $k\neq m$ ならば，$\mathbb{E}[v_{ii}^k\overline{v_{ii}^m}]=\mathbb{E}[v_{ij}^k\overline{v_{ij}^m}]=0$ である．

z を複素数とする．直交 Weingarten 関数 $\mathrm{Wg}_k^O(\cdot;z)$ の定義は，以下のように表現論と組合せ論の言葉で記述される．登場する用語については，例えば [Mac] の I-1 と VII-2 を参照されたい．

$$\mathrm{Wg}_k^O(\sigma;z) = \frac{1}{(2k-1)!!}\sum_{\lambda\vdash k}\frac{f^{2\lambda}}{C'_\lambda(z)}\omega^\lambda(\sigma) \qquad (\sigma\in S_{2k}).$$

ここで和は，k の分割 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\dots)$, $\quad \lambda_1\ge\lambda_2\ge\cdots\ge 0, \quad k=\sum_{i\ge 1}\lambda_i$, 全体を走る．分割 λ は k 個の箱を持つヤング図形と同一視される．$C'_\lambda(z):=\prod_{(i,j)\in\lambda}(z+2j-i-1)$ であり，(i,j) はヤング図形 λ の箱（の座標）を走る．$\chi^{2\lambda}$ を $2\lambda=(2\lambda_1,2\lambda_2,\dots)$ に対応する S_{2k} の既約指標，H_k $(\subset S_{2k})$ を超八面体群とする．$\omega^\lambda(\sigma)$ は $\omega^\lambda(\sigma)=(2^k k!)^{-1}\sum_{\zeta\in H_k}\chi^{2\lambda}(\sigma\zeta)$ で定義され，ゲルファント対 (S_{2k},H_k) の帯球関数と呼ばれている．$f^{2\lambda}$ は $\chi^{2\lambda}$ の恒等置換での値，同じことだが型 2λ の標準ヤング盤の個数である．σ を固定したときに，$\mathrm{Wg}_k^O(\sigma;z)$ は z に関して有理式である．

関数 $\mathrm{Wg}_k^O(\cdot;z)|_{z=N}$ は，実直交群 $O(N)$ のハール測度に従うランダム行列に関する研究で初登場した（[CM]）．定理 1 では，パラメータ z が $z=N$ ではなく $z=N+1$ で現れているところに注意してほしい．

参考文献

[CM] B. Collins and S. Matsumoto, *On some properties of orthogonal Weingarten functions.* J. Math. Phy. 50 (2009), 113516, 14 pp.

[Mac] I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, 2nd ed. Oxford University Press, 1995.

[Mat] S. Matsumoto, *General moments of matrix elements from circular orthogonal ensembles.* arXiv:1109.2409v1, 19 pp.