ON GAUGEABILITY FOR GENERALIZED FEYNMAN-KAC FUNCTIONALS AND ITS APPLICATIONS

金大弘, 桑江一洋
(熊本大学・自然科学研究科)

1. 結果

E を局所コンパクト可分距離空間, m を台が全体の正値ラドン測度とし, ∂ を一点コンパクト化 $E_\partial := E \cup \{\partial\}$ における無限遠点とする. $L^2(E;m)$ 上の正則ディリクレ形式を $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ とし, 対応する m-対称ハント過程 $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathcal{F}_t, X_t, \zeta, \mathbf{P}_x, x \in E)$ の**非再帰性(T)**, **既約性(I)** および**絶対連続性(AC)** を仮定する. また PCAF は全ての出発点で定義される古典的なものだけ扱うものとし, 対応する滑らかな測度の全体も S_1 と表記し, 以下の測度の族はその部分集合とみなす. また $\alpha \geq 0$ に対して, α-位のレゾルヴェント核 $R_\alpha(x,y)$ が全ての $x, y \in E$ で定義され, $R(x,y) := R_0(x,y)$ とする. 非負ボレル測度 ν に対し, $R_\alpha\nu(x) := \int_E R_\alpha(x,y)\nu(dy)$, $R\nu(x) := R_0\nu(x)$ とおく. $\nu \in S_K^1(\mathbf{X})$(**加藤クラス**) とは $\lim_{\alpha\to\infty}\sup_{x\in E} R_\alpha\nu(x) = 0$ が成立することとし, $\nu \in S_{D_0}^1(\mathbf{X})$ (**グリーン有界**) とは $\sup_{x\in E} R\nu(x) < \infty$ のこととし, $\nu \in S_{CK_\infty}^1(\mathbf{X})$(*Chen's Green-tight Kato class*) とは任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\nu(K) < \infty$ をみたすボレル集合 K と $\delta > 0$ がとれて $\nu(B) < \delta$ をみたす任意の可測集合 $B \subset K$ に対し

$$\sup_{x\in E} R(\mathbf{1}_{K^c\cup B}\nu)(x) = \sup_{x\in E}\int_{K^c\cup B} R(x,y)\nu(dy) < \varepsilon$$

が成立することとする. $(\mathcal{E}, \mathcal{F}_e)$ を $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ の**拡大ディリクレ空間**とする. この講演では $u \in \mathcal{F}_e \cap C_\infty(E)$ を固定して使用する. F を対角線上で退化かつ $F(x, \partial) = 0$ である $E \times E$ 上対称な $E \times E_\partial$ 上のボレル有界可測関数とし, $A_t^F := \sum_{0<s\leq t} F(X_{s-}, X_s)$ を非局所型の加法汎関数とする. (N, H) を $\mathbf{X}$ の Lévy 系とし, $N(F)(x) := \int_E F(x,y)N(x,dy)$ とおく. $\mu_{\langle u\rangle} + \mu_+ + N(F_+)\mu_H \in S_{CK_\infty}^1(\mathbf{X})$ と $\mu_- + N(F_-)\mu_H \in S_{D_0}^1(\mathbf{X})$ を仮定し $\mu := \mu_+ - \mu_-$, $F = F_+ - F_-$ とする. 我々が考える Feynman-Kac 半群は次のものである: $e_A(t) := e^{N_t^u + A_t^\mu + A_t^F}$ として

$$Q_t f(x) := \mathbf{E}_x[e_A(t) f(X_t)] \quad \text{for } x \in E, \quad f \in \mathcal{B}_+(E). \tag{1}$$

ここで N_t^u は u に対する福島分解のエネルギー 0 の部分であり, 全ての出発点について確率 1 で定義できるものである. $\mathcal{C}(\subset \mathcal{F} \cap C_0(E))$ を $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ の芯とする. 次の $L^2(E;m)$ 上の 2 次形式 $(\mathcal{Q}, \mathcal{C})$ を考える.

$$\mathcal{Q}(f,g) := \mathcal{E}(f,g) + \mathcal{E}(u, fg) - \int_E fg\,d\mu - \int_{E\times E} f\,N(g(e^F - 1))d\mu_H \quad \text{for } f, g \in \mathcal{C}.$$

$\mathcal{Q}$ は well-defined で $\mathcal{C}$ 上で下に有界な 2 次形式であり, (1) で定めた半群は $(\mathcal{Q}, \mathcal{C})$ の $L^2(E;m)$ 上の閉包 $(\mathcal{Q}, \mathcal{D}(\mathcal{Q}))$ に対応する強連続半群とみなせる ([1]).

$V := G_u - F_u + F_+ (\geq 0)$, $V := V(u, F)$ and $V_+ := V(u, F_+)$ とする. ここで $G_u := e^{F_u} - 1$ で $F_u(x,y) := F(x,y) + (u(x) - u(y))$ である. このとき $V_+ - V = G_u^+ - G_u - F_-$. さらに $\mu_V^1 := \mu_{V(u,F)}^1 := N(V)\mu_H + \mu_+ + \frac{1}{2}\mu_{\langle u\rangle}^c$, $\mu_V^2 := \mu_{V(u,F)}^2 :=$

$N(F_-)\mu_H+\mu_-$ and $\mu_V:=\mu_V^1-\mu_V^2$ とし, $\mu^1_{V_+}=N(V_+)\mu_H+\mu_++\frac{1}{2}\mu^c_{\langle u\rangle}$, $\mu^2_{V_+}=\mu_-$ とする. これより $\mu_V=N(V-F_-)\mu_H+\mu+\frac{1}{2}\mu^c_{\langle u\rangle}$, $\mu_{V_+}=N(V_+)\mu_H+\mu+\frac{1}{2}\mu^c_{\langle u\rangle}$, $\mu_{V_+}-\mu_V=N(G_u^+-G_u)\mu_H\geq 0$. 以下を考える:

$$\lambda(\mu_V):=\inf\left\{\mathcal{Q}(f,f)\;\middle|\; f\in\mathcal{F}\cap C_0(E),\ \int_E f^2d\mu_V^1=1\right\}, \tag{2}$$

$$\lambda(\mu_{V_+}):=\inf\left\{\mathcal{Q}(f,f)\;\middle|\; f\in\mathcal{F}\cap C_0(E),\ \int_E f^2d\mu_{V_+}^1=1\right\}. \tag{3}$$

補題 1.1. $\lambda(\mu_V)>0$ と $\lambda(\mu_{V_+})>0$ は同値である.

定理 1.1. $\mu_{\langle u\rangle}+\mu_++N(F_+)\mu_H\in S^1_{CK_\infty}(\mathbf{X})$ かつ $\mu_-+N(F_-)\mu_H\in S^1_{D_0}(\mathbf{X})$ と仮定する. このとき $\lambda(\mu_V)>0$ と $\sup_{x\in E}\mathbf{E}_x[e_A(\zeta)]<\infty$ は同値である.

系 1.1 (Super Gauge Theorem)**.** $\mu_{\langle u\rangle}+\mu_++N(F_+)\mu_H\in S^1_{CK_\infty}(\mathbf{X})$ かつ $\mu_-+N(F_-)\mu_H\in S^1_{D_0}(\mathbf{X})$ を仮定する. $\sup_{x\in E}\mathbf{E}_x[e_A(\zeta)]<\infty$ なら十分 1 に近い $p_0>1$ がとれて任意の $p\in]1,p_0[$ に対し $\sup_{x\in E}\mathbf{E}_x[e_A(\zeta)^p]<\infty$ が成立する.

$S^1_{CS_\infty}(\mathbf{X})$ (resp. $S^1_{DS_0}(\mathbf{X})$) を Chen の意味での条件付グリーン緊密測度 (resp. 条件付きグリーン有界測度) の全体とする (定義の記述を省く). $A^1_{CS_\infty}(\mathbf{X}), J^1_{CS_\infty}(\mathbf{X})$ (resp. $A^1_{DS_0}(\mathbf{X}), J^1_{DS_0}(\mathbf{X})$) 等を Chen の意味での条件付グリーン緊密飛躍関数 (resp. 条件付 Green-有界飛躍関数) のクラスとする (定義の記述を省く). $\widetilde{\mathbf{X}}^+$ を $Y_t^+\exp[-A_t^{F_-}]$ で変換して得られた $e^{-2u}m$-対称な Hunt 過程とする. ここで $Y_t^+:=\mathrm{Exp}(M_t^{G_u^+}+M_t^{-u,c})$ で M^{G_u+} は飛躍関数が G_u^+ である純不連続な MAF である. $\widetilde{R}^+(x,y)$ を $\widetilde{\mathbf{X}}^+$ の Green 核とする. $R_A(x,y)$ を Feynman-Kac 半群 Q_t の Green 核とする.

定理 1.2. $\mu_{\langle u\rangle}+\mu_++N(F_+)\mu_H\in S^1_{CS_\infty}(\mathbf{X})$ かつ $\mu_-+N(F_-)\mu_H\in S^1_{DS_0}(\mathbf{X})$ とする. 正定数 $C>0$ がとれて

$$C^{-1}R(x,y)\leq\widetilde{R}^+(x,y)\leq CR(x,y)\quad\text{for all }(x,y)\in E\times E \tag{4}$$

なら以下は同値: (i): $\lambda(\mu_V)>0$ (analytic characterization). (ii): $\sup_{x\in E}\mathbf{E}_x[e_A(\zeta)]<\infty$ (gaugeability).(iii):$\sup_{(x,y)\in E\times E\setminus\mathsf{d}}\mathbf{E}_x^y[e_A(\zeta)]<\infty$ (conditional gaugeability). (iv): $R^A(x,y)<\infty$ for any $(x,y)\in E\times E\setminus\mathsf{d}$ (subcriticality). ここで $\mathsf{d}:=\{(x,y)\in E\times E\mid 0<R(x,y)<\infty\}$.

(4) の十分条件として一般的な枠組みでは, $u=0$, $F_+\in A^1_{CS_\infty}(\mathbf{X})\cap J^1_{CS_\infty}(\mathbf{X})$, $F_-\in A^1_{DS_0}(\mathbf{X})\cap J^1_{DS_0}(\mathbf{X})$ などが挙げられる. $u\neq 0$ のときの十分条件の明示はまだ未解決である. $\mathbf{X}$ が $\mathbb{R}^d$ 上の対称 α-安定過程 ($d>\alpha$) のときは $\mu_{\langle u\rangle}+|\mu|+N(|F|)\mu_H\in S^1_{D_0}(\mathbf{X})$ だけで $\widetilde{\mathcal{E}}^+$ と $\mathcal{E}$ の同値性が示せるので Chen-Kumagai の結果を経由して [3] と同様に (4) が示せる

References

[1] Z.-Q. Chen, P. J. Fitzsimmons, K. Kuwae and T.-S. Zhang, *On general perturbations of symmetric Markov processes*, J. Math. Pures et Appliquées **92** (2009), no. 4, 363–374.

[2] D. Kim and K. Kuwae, *On gaugeability for generalized Feynman-Kac functionals and its applications*, preprint (2011).

[3] R. Song, *Estimates in the transition densities of Girsanov transforms of symmetric stable processes*, J. Theor. Probab. **19** (2006), no. 2, 487–507.