偶数次元ブラウン運動に対する Wiener sausage の体積の期待値について

濱名　裕治（熊本大学理学部）

$\mathbb{R}^d$ 内の半径 r の球を B，$\{W_t\}_{t\geqq 0}$ を $\mathbb{R}^d$ 上のブラウン運動とするとき，$t\geqq 0$ に対して

$$C_t = \bigcup_{0\leqq s\leqq t}(W_s + B)$$

とおく．$\{C_t\}_{t\geqq 0}$ を Wiener sausage とよぶ．Wiener sausage の体積の期待値は，$\tau_B := \inf\{t>0\,;\, W_t\in B\}$ を用いて，

$$E|C_t| = \int_{\mathbb{R}^d\setminus B} P_x[\tau_B\leqq t]dx + |B|$$

と表すことができる．ここで，$|B|$ は B の体積である．この右辺の積分を $L(t)$ とおくと，L のラプラス変換 $\mathcal{L}[L]$ は，第２種変形ベッセル関数 K_ν を用いて

$$\mathcal{L}[L](\lambda) = \frac{S_{d-1}r^{d-1}}{\sqrt{2\lambda^3}}\frac{K_{d/2}(r\sqrt{2\lambda})}{K_{d/2-1}(r\sqrt{2\lambda})}\quad (\lambda>0)$$

と表示できる．ここで，S_{d-1} は $(d-1)$ 次元球面の表面積である．したがって，$K_{d/2}/K_{d/2-1}$ をラプラス逆変換できる関数で表示できれば，L が求められることになる．

$d=1$ のときは，$L(t)=2\sqrt{2t/\pi}$，$d=3$ のときは，$L(t)=2\pi rt+2r^2\sqrt{2\pi t}$ であることはよく知られている．さらに，d が 5 以上の奇数のとき，

$$L(t) = S_{d-1}r^{d-2}\left[\frac{(d-2)t}{2}+\frac{r^2}{d-4}-\frac{\sqrt{2}r^3}{\sqrt{\pi t}}\sum_{j=1}^{M_d}\frac{1}{(z_j^{(d)})^3}\int_0^\infty e^{-\frac{r^2x^2}{2t}+z_j^{(d)}x}dx\right]$$

が成立する．ただし，M_d は $K_{d/2-1}$ の零点の個数，$z_j^{(d)}$ $(j=1,2,\dots,M_d)$ はその零点である．(Hamana [1] 参照)

一般に，ν が実数のとき，第２種変形ベッセル関数 K_ν の零点は有限個あり，その個数を $N(\nu)$ と書くと，$\nu-1/2$ が整数の場合は，$N(\nu)=|\nu|-1/2$ であり，$\nu-1/2$ が整数でない場合は，$|\nu|-1/2$ に最も近い偶数である．したがって，特に

$$M_d = N(d/2-1) = \begin{cases} 0 & d=1,2,3,4 \\ \dfrac{d-3}{2} & d \text{ が 5 以上の奇数} \\ 2\left[\dfrac{d-1}{4}\right] & d \text{ が 6 以上の偶数} \end{cases}$$

となる．

また，$\nu-1/2$ が整数の場合，$z^\nu K_\nu$ は $D:=\{z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}\,;\,|\arg z|<\pi\}$ 上の多項式なので，$K_{\nu+1}/K_\nu$ は E 上の有理関数となり部分分数に分解することができる．したがって，d が奇数のとき，$d/2-1$ は整数となるので，$\mathcal{L}[L]$ の逆変換が計算でき，上の結果を得ることができる．一方，$K_{\nu+1}/K_\nu$ は $\mathbb{C}$ 上の有理関数（したがって，特に有理型）に拡張できるので，適当な関数の円周を積分経路とするの複素積分を考え，留数定理を適用することで同じ表示が得られることがわかる．

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

しかし，$\nu-1/2$ が整数でない場合は，K_ν は D 上の正則関数であるので，$K_{\nu+1}/K_\nu$ は D 上の有理型関数となるが，負の実軸を超えて解析接続することはできない．したがって，適当な関数の複素積分を考えたとき，積分経路を円周にとることができない．この場合，積分経路をうまくとることで，$K_{\nu+1}/K_\nu$ の表示を与えることができる．このことより，次の結果が得られる．(Hamana [2] 参照)

定理２．$(0,\infty)$ 上の関数 Q_d を次で定める．

$$Q_d(x)=\frac{1}{x^3}\frac{1}{\{K_{d/2-1}(x)\}^2+\{\pi I_{d/2-1}(x)\}^2}\quad (x>0)$$

（１）$d=2$ のとき，次が成り立つ．

$$L(t)=2\pi r\biggl[\sqrt{\frac{2t}{\pi}}+\frac{\sqrt{2}r^2}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{r^2x^2}{2t}}(xy-1+e^{-xy})Q_2(y)dxdy\biggr].$$

（２）$d=4$ のとき，次が成り立つ．

$$L(t)=2\pi^2r^2\biggl[t-\frac{\sqrt{2}r^2}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{r^2x^2}{2t}}(1-e^{-xy})Q_4(y)dxdy\biggr].$$

（３）$d\geqq 6$, d が偶数のとき，次が成り立つ．

$$\begin{aligned}L(t)=S_{d-1}r^{d-2}\biggl[&\frac{(d-2)t}{2}+\frac{r^2}{d-4}\\&-\frac{\sqrt{2}r^2}{\sqrt{\pi t}}\sum_{j=1}^{M_d}\frac{1}{(z_j^{(d)})^2}\int_0^\infty e^{-\frac{r^2x^2}{2t}+z_j^{(d)}x}dx\\&+\frac{(-1)^{d/2-1}\sqrt{2}r^2}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{r^2x^2}{2t}-xy}Q_d(y)dxdy\biggr].\end{aligned}$$

［補足］$P_x(\tau_B\leqq t)$ は，出発点が $\|x\|$ の指数 $d/2-1$ のベッセル過程が初めて r に到達する時刻の分布関数であり，これは，Hamana-Matsumoto [3] により，すでにその表示が与えられている．$K_{\nu+1}/K_\nu$ の表示を経由せず，直接，x で積分することにより，$L(t)$ が求められるが，その計算は易しくない．また，$K_{\nu+1}/K_\nu$ を求める手法は，Hamana-Matsumoto [3] で用いられたものに若干の修正を加えたものである．

参考文献

[1] Y. Hamana, *The expected volume and surface area of the Wiener sausage in odd dimensions*, Osaka J. Math. (to appear).
[2] Y. Hamana, *A formula for the Bessel functions ratio and the expected volume of the Wiener sausage*, preprint.
[3] Y. Hamana and H. Matsumoto, *The probability distributions of the first hitting times of Bessel processes*, preprint.