Weak Poincaré inequalities on domains defined by Brownian rough paths

会田茂樹
大阪大学・大学院基礎工学研究科

1 Introduction

$(X, \mathcal{F}, m)$ を確率空間として、$(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ を $L^2(X,m)$ 上の Dirichlet form とする。Weak Poincaré inequality(=**WPI**) とは、次の不等式を言う:
WPI $(0,\infty)$ 上で定義された関数非負非増加関数 $\xi(\cdot)$ が存在して、任意の $\delta > 0$ と $f \in D(\mathcal{E}) \cap L^\infty(X,m)$ に対して、次が成立する。

$$\int_X (f - \langle f\rangle_m)^2 \, dm \le \xi(\delta)\mathcal{E}(f,f) + \delta\|f\|_{L^\infty}^2. \tag{1.1}$$

$\langle f\rangle_m$ は期待値を表す。この不等式は、[8] で導入された。なお、[8] では、functional $\|f\|_{L^\infty}^2$ はもっと一般な $\Phi(f)$ になっており、$\Phi(f) < \infty$ なる関数について、$P_t f$ が $\langle f\rangle_m$ に収束する (指数オーダーより遅い) 早さについて関数 ξ を用いて論じている。Poincaré inequality(=**PI**) は、全ての $\delta > 0$ に対して、$\xi(\delta)$ を定数として **WPI** が成立することと同値であるから、**WPI** は、**PI** より弱い。しかし、既約性 ($\mathcal{E}(f,f) = 0$ ならば、$f = \mathrm{const}, \mathrm{a.s.}$) よりは強い概念である。**WPI** は、実は、楠岡 [5] により導入された Weak spectral gap property ($(\langle f_n\rangle_m = 0,\ f_n \in D(\mathcal{E})$ with $\sup_n \|f_n\|_{L^2} < \infty$ が $\mathcal{E}(f_n, f_n) \to 0$ をみたせば、f_n は 0 に確率収束する。) と同値である。また、[5] で、この性質は Wiener 空間上の "連結な開集合" 上で自然に定義される Dirichlet form に対して、成立することが示されている。ここで言う "連結な開集合" の典型例は、N 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^N$ に等長に埋め込まれた単連結なコンパクトリーマン多様体 M 上の次の確率微分方程式の解であたえられる $U_{x,y,\varepsilon} = \{\mathbf{w} \in \mathbf{W}^N \mid X(1,x,\mathbf{w}) \in B_\varepsilon(y)\}$ である ($B_\varepsilon(y)$ は $y \in M$ を中心とした半径 ε の可縮な開球を表す):

$$dX(t,x,\mathbf{w}) = P\left(X(t,x,\mathbf{w})\right) \cdot d\mathbf{w}(t) \tag{1.2}$$

$$X(0,x,\mathbf{w}) = x \in M. \tag{1.3}$$

ただし、$\mathbf{W}^N$ は、N 次元 Wiener 空間、$P(x) : \mathbb{R}^N \to T_xM$ は射影作用素である。また、[3] では、その結果を用いて、M 上のループ空間で定義される Dirichlet form についても **WPI** が成立することが示された。しかし、これらの証明では ξ の評価が具体的に得られているわけではない。講演者は、ξ の具体的な評価を与えることを目的として、Wiener 空間上の通常の意味での連結な開集合上の Dirichlet form に対する **WPI** の証明を与えた [3]。そのキーポイントは次の 3 つであった：
1. WPI は state space の連結和をとる操作に関して、安定であること。

2. Wiener 空間の中の (開集合の) ボールのような凸 (H-convex [4]) な集合上では **PI**(実はより強い対数ソボレフ不等式=**LSI**) が成立すること
3. Wiener 空間の連結な開集合はボールの可算個の連結和で表されること

連結和をとると係数 $\xi(\cdot)$ は、そのたびに悪くなるが、一応評価を与えることはできる。しかし、我々の考えたい $U_{x,y,\varepsilon}$ は明らかに通常の位相で連結な開集合ではなく、ボールの連結和で書けるものではない。しかし、Terry Lyons [6] により、確率微分方程式の解は通常の位相では連続ではないが、Lévy の確率面積の汎関数も込めた Brownian rough path としての連続関数 (roughness は、$2 < p < 3$) になるという結果が知られている。したがって、rough path としてのボール (それは、もはや Wiener 空間で考えると、ボールのような凸性をもたない) を最小単位と考えて、その上で **WPI** が成立すること、$U_{x,y,\varepsilon}$ の集合がそのような基本単位の集合の可算個の連結和で表されることが示されれば、上の **1,2,3** のボールをこの基本単位の集合に置き換えて、同じ証明が通用することになる。講演では、実際にこのことが可能であることを話したい。ここでは、**WPI** が成立する上で言うところの原点の近傍の基本単位の集合 $U_{a,0}$ を $N = 2$ の場合に書いておく。この集合が、H-convex ([4]) ならば、話しは簡単だが、実はそうではない。現在のところ、さらに強く、**LSI**, **PI** が成立するかどうかわからない。

$$U_{a,0} := \left\{ \mathbf{w} = (w_1, w_2) \in \mathbf{W}^2 \;\middle|\; \|C_{w_1,w_2}\|_{p/2} < a, \|\overline{w_1}\|_p < a, \|\overline{w_2}\|_p < a \right\}.$$

ただし、$a > 0$ で、$C_{w_1,w_2}(s,t) = \int_s^t (w_1(u) - w_1(s)) dw_2(u)$, $\overline{w_i}(s,t) = w_i(t) - w_i(s)$, $(0 \le s \le t \le 1)$ で $\Delta = \{(s,t) \mid 0 \le s \le t \le 1\}$ 上の連続関数 $\eta(s,t)$ に対して、$\|\eta\|_q$ は次の q-variation norm を表す。

$$\|\eta\|_q = \sup_D \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} |\eta(t_i, t_{i+1})|^q \right\}^{1/q}, \tag{1.4}$$

ここで $D = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1\}$ は $[0,1]$ の全ての有限分割を動く。

参考文献

[1] S. Aida, Weak Poincaré inequalities on domains defined by Brownian rough paths, Preprint, November, 2002.

[2] S. Aida, An estimate of the gap of spectrum of Schrödinger operators which generate hyperbounded semigroups, J. Funct. Anal. **185** (2001), 474–526.

[3] S. Aida, Uniform Positivity Improving Property, Sobolev Inequality and Spectral Gaps, J. Funct. Anal. **158**, (1998), 152–185

[4] D. Feyel and A. S. Üstünel, The notion of convexity and concavity on Wiener space, J. Funct. Anal. **176** No. 2 (2000), 400–428.

[5] S. Kusuoka, Analysis on Wiener Spaces, II, Differential Forms, J. Funct. Anal. **103**, (1992), 229–274.

[6] T. Lyons, Differential equations driven by rough signals, Rev.Mat.Iberoamer., **14**, (1998), 215–310.

[7] T. Lyons and Z. Qian, System control and rough paths, Oxford Mathematical Monographs, to be published.

[8] M. Röckner and F-Y. Wang, Weak Poincaré inequalities and L^2-Convergence Rates of Markov Semigroups, J.Funct.Anal. **185**(2001), 564–603.