熱核の対数微分とループ空間上の対数ソボレフ不等式

平成 15 年 1 月 9 日

1 主結果

以下に述べる内容は, 熱核がある評価を満たしているような多様体上で一般に成立する. しかし, いまのところ, そのような評価が示せているのは hyperbolic space だけなのでここでは hyperbolic space に限って述べることにする. ある程度一般な Hadamard 多様体で成立すると予想している. $\mathbb{H}^n$ を負定曲率 $-a$ の hyperbolic space とする.

$$P_{x,y}(\mathbb{H}^n) = C([0,1] \to \mathbb{H}^n \mid \gamma(0) = x, \gamma(1) = y)$$

を pinned measure $\nu_{x,y}$ が与えられた pinned path space とする. ただし, 通常のユークリッド空間も $a = 0$ の hyperbolic space と考えて我々の枠組に入る.

Theorem 1.1 (主定理 1) $P_{x,y}(\mathbb{H}^n)$ 上で次の対数ソボレフ不等式が成立する.

$$\int_{P_{x,y}(\mathbb{H}^n)} F^2 \log(F^2/\|F\|^2_{L^2(\nu_{x,y})}) d\nu_{x,y} \le \int_{P_{x,y}(\mathbb{H}^n)} C(\gamma)\|D_0F(\gamma)\|^2_{H^1} d\nu_{x,y} \tag{1}$$

ここで

$$C(\gamma) = 2\left[1 + 2\left\{1 + \sqrt{a}\sup_{0\le t\le 1} d(\gamma_t, y) + \left(C_n(a) + \frac{n-1}{2}\right)a\right\} \cdot e^{\left(C_n(a)+\frac{n-1}{2}\right)a}\right]^2, \tag{2}$$

ここで $C_n(a)$ は a の単調増加関数で $d(y,z)$ は *Riemannian distance* を表す.

証明は, $P_{x,y}(\mathbb{H}^n)$ 上でまず Clark-Ocone-Haussmann formula (Theorem 2.4) を示してから, その応用として示す.
注意: (1) 十分小さな正数 ε については

$$E^{\nu_{x,y}}\left[\exp\left(\varepsilon \sup_{0\le t\le 1} d(y,\gamma_t)^2\right)\right] < \infty \tag{3}$$

となることから $C(\gamma)$ は強い可積分性をもつ.

(2) $a = 0$ の通常の標準 pinned Brown 運動のとき, COH formula を用いる証明では $C(\gamma) = 18$ となる．しかし、$a = 0$ のときベストな結果は $C(\gamma) = 2$ である．2 に改良できるかどうかはまだわからない.

(3) $\mathbb{H}^n$ を等長変換群で割った商空間として得られる負定曲率のコンパクトリーマン多様体 M の上の pinned path space やループ空間 $C(S^1 \to M)$ の各ホモトピー類でも同様な不等式を示すことができる.

2 COH formula on $P_{x,y}(\mathbb{H}^n)$

Brown 運動の測度 μ_x が与えられた Path space

$$P_x(\mathbb{H}^n) = \{\gamma : [0,1] \to \mathbb{H}^n \mid \gamma(t) \text{ is continuous and } \gamma(0) = x\}$$

および $P_{x,y}(\mathbb{H}^n)$ 上で H 微分をそれぞれ次のように定義する．ここで $F(\gamma) = f(\gamma_{t_1}, \ldots, \gamma_{t_k})$ は smooth cylindrical function.

$$DF(\gamma)_t = \sum_{i=1}^{k} \overline{\nabla f(\gamma)}_{t_i} t_i \wedge t, \tag{4}$$

$$D_0F(\gamma)_t = \sum_{i=1}^{k} \overline{\nabla f(\gamma)}_{t_i} (t_i \wedge t - t_i t), \tag{5}$$

ここで $\overline{\nabla f(\gamma)}_{t_i} = \tau(\gamma)_{t_i}^{-1} \nabla_i f(\cdots, \gamma_{t_i}, \cdots)$．一般に多様体 M 上にベクトル場 X が与えられたとき

$$\overline{X(\gamma)}_t := \tau(\gamma)_t^{-1} X(\gamma_t)$$

のように確率平行移動 $\tau(\gamma)_t : T_xM \to T_{\gamma_t}M$ を用いて T_xM の元とみなせる．これは, 一般のテンソルでも同様で $\overline{T(\gamma)}_t$ のように書くことにする.

$$V_y(t,z) = \mathrm{grad}_z \log p(1-t, y, z) \in T_zM \tag{6}$$

に対しては,

$$\overline{V_y(t,\gamma)}_t = \tau(\gamma)_t^{-1} \mathrm{grad}_{\gamma_t} \log p(1-t, y, \gamma_t) \in T_xM \tag{7}$$

となる．$p(t,y,z)$ は $e^{\frac{t\Delta}{2}}$ の heat kernel を表す．次のように書き直そう.

$$V_y(t,z) = \frac{v_{z,y}}{1-t} + \mathrm{grad}_z \log f(1-t, y, z). \tag{8}$$

ここで, $v_{z,y} \in T_z\mathbb{H}^n$ は $\exp_z(v_{z,y}) = y$ となる z から y に向かう大きさ $d(y,z)$ の方向ベクトル,

$$f(t,y,z) = \exp\left(\frac{d(y,z)^2}{2t}\right) p(t,y,z) \tag{9}$$

である.

$$\sup_{0\le t<1, y,z\in\mathbb{H}^n} |\mathrm{grad}_z \log f(1-t,y,z)| < \infty \tag{10}$$

を示すことができる. (Lemma 3.1 による.) COH formula を述べるため filtration を導入する.

$$\mathfrak{F}_t = \ \sigma(\gamma(s) \mid 0 \le s \le t) \text{ の } \mu_x \text{ による完備化.} \tag{11}$$

Filtration 付の確率空間 $(P_x(\mathbb{H}^n), \mathfrak{F}_t, \mu_x)$ 上のマルチンゲール

$$\rho(t,\gamma) = \frac{p(1-t,y,\gamma(t))}{p(1,x,y)} = \exp\left(\int_0^t (\overline{V_y(s,\gamma)}_s, db(s)) - \frac{1}{2}\int_0^t |\overline{V_y(s,\gamma)}_s|^2 ds\right) \quad (0 \le t < 1). \tag{12}$$

を考える. ここで $b(t) = \int_0^t \tau(\gamma)_t^{-1} \circ d\gamma_t$ は μ_x の下で $T_x\mathbb{H}^n$ 上の Brown 運動である. 次の二つの補題が COH formula を述べかつ示すのに必要である.

Lemma 2.1 (1) *$\nu_{x,y}$ is the unique probability measure $Q_{x,y}$ on $P_{x,y}(\mathbb{H}^n)$ such that $Q_{x,y}$ is absolutely continuous to μ_x on the σ-field $\mathfrak{F}_t$ and*

$$\left.\frac{dQ_{x,y}}{d\mu_x}\right|_{\mathfrak{F}_t}(\gamma) = \rho(t,\gamma) \quad \mu_x - a.s.\ \gamma \quad (0 \le t < 1).$$

In particular, $\gamma(t)$ is an $\mathfrak{F}_t$-semimartingale for $t \in [0,1)$ under $\nu_{x,y}$.

(2) *For any $1 \le q < 2$, it holds that*

$$E^{\nu_{x,y}}\left[\int_0^1 |\overline{V_y(s,\gamma)}_s|^q ds\right] < \infty. \tag{13}$$

(3) *Let us set*

$$w(t) := b(t) - \int_0^t \overline{V_y(s,\gamma)}_s ds \ (0 \le t < 1),$$

where $b(t)$ is an Ito-Cartan development of the semimartingale $\gamma(t)$. Then $w(t)$ $(0 \le t < 1)$ is an $\mathfrak{F}_t$-Brownian motion under the probability measure $\nu_{x,y}$ and continuously extended to the time 1 $\nu_{x,y}$ -a.s. γ. In particular under $\nu_{x,y}$, $\gamma(t), b(t)$ are $\mathfrak{F}_t$-adapted semimartingales for $0 \le t \le 1$.

(4) *Let*

$$\mathfrak{H}_t = \ \sigma(w(s) \mid 0 \le s \le t) \text{ の } \mu_{x,y} \text{ による } \textit{completion.}$$

Then

$$\mathfrak{F}_t = \mathfrak{H}_t. \qquad (0 \le t \le 1) \tag{14}$$

$0 \le T < 1$ をひとつとる．Lemma 2.1 (4) より，$F \in L^2(P_{x,y}(\mathbb{H}^n)$ に対してマルチンゲール $E^{\nu_{x,y}}[F \mid \mathfrak{F}_t]$ は伊藤の表現定理によりある $\mathfrak{F}_t$-predictable L^2-process$H(s,\gamma)$ で

$$E^{\nu_{x,y}}\left[F \mid \mathfrak{F}_t\right] = E^{\nu_{x,y}}\left[F\right] + \int_0^t (H(s,\gamma), dw(s)) \quad (0 \le t \le 1)$$

と書ける． F がある regularity をもつとき，$H(s,\gamma)$ を具体的に $P_{x,y}(\mathbb{H}^n)$ 上の H 微分 $D_0F(\gamma)$ で表示するのが COH formula である． その具体形を求めるためには部分積分の公式 (Lemma 2.3) を用いる．

Definition 2.2 $0 < T < 1$ とする．$S(\gamma)_T$ をパス γ ごとに定まる $L^2([0,T] \to T_x\mathbb{H}^n)$ 上の次の有界線形作用素とする．

$$\begin{aligned} S(\gamma)_T(h)(t) &= h(t) - K(\gamma)_t \int_0^t h(s)ds & (15)\\ K(\gamma)_t &= -\frac{1}{1-t} + \frac{1-\sqrt{a}r_t\coth(\sqrt{a}r_t)}{1-t}\left(\overline{P^{\perp}_{\gamma,y}}\right)_t + \frac{(n-1)a}{2} + C(t,\gamma) & (16)\\ C(t,\gamma) &= \overline{\nabla^2 \log f(1-t,y,\gamma)}_t & (17)\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} r_t &= d(y,\gamma_t) & (18)\\ P^{\perp}_{z,y} &= \text{ベクトル } v_{z,y} \in T_z\mathbb{H}^n \text{ の直交補空間への射影} & (19)\end{aligned}$$

注: (1) 一般の場合は

$$K(\gamma)_t = \overline{\nabla^2 \log p(1-t,y,\gamma)}_t - \frac{1}{2}\overline{\mathrm{Ric}(\gamma)}_t \tag{20}$$

とする．$\mathbb{H}^n$ では

$$\begin{aligned} \nabla^2_z\left\{\frac{d(y,z)^2}{2}\right\} &= I_{T_z\mathbb{H}^n} - \left(1-\sqrt{a}d(y,z)\coth(\sqrt{a}d(y,z))\right)P^{\perp}_{z,y} & (21)\\ \mathrm{Ric} &= -(n-1)a & (22)\end{aligned}$$

となっていることから (16) を得る．

(2) a の単調増加関数 $C_n(a)$ が存在して

$$\sup_{0<t\le 1, y,z\in\mathbb{H}^n} |\nabla_z^2 \log f(t,y,z)| \le C_n(a)a \tag{23}$$

を示すことができる．この $C_n(a)$ が Theorem 1.1 に出ている．

Lemma 2.3 (1) *Let* $F(\gamma)=f(\gamma_{t_1},\ldots,\gamma_{t_n})\in\mathfrak{F}C_b^\infty$, $(0<t_1<\cdots<t_n\le T<1)$. *Let* $h(t,\gamma)$ *be an* $\mathfrak{F}_t$*-adapted process and satisfying that for some* $\varepsilon>0$

$$E^{\nu_{x,y}}\left[\int_0^T |h(t,\gamma)|^{2+\varepsilon}dt\right]<\infty.$$

Then the following integration by parts formula holds.

$$E^{\nu_{x,y}}\left[\int_0^T (DF(\gamma)^{\cdot}_t, h(t,\gamma))dt\right] = E^{\nu_{x,y}}\left[F(\gamma)\int_0^T (S(\gamma)_T(h)(t), dw(s))\right]. \tag{24}$$

(2) *The following identity holds.*

$$E^{\nu_{x,y}}\left[\int_0^T \left(\left((S(\gamma)_T^{-1})^* DF(\gamma)^{\cdot}\right)_t, h(t,\gamma)\right)dt\right] = E^{\nu_{x,y}}\left[\int_0^T (H(t,\gamma),h(t,\gamma))dt\right]. \tag{25}$$

The operator $(S(\gamma)_T^{-1})^*$ *is given explicitly as follows:*

$$\left(S(\gamma)_T^{-1}\right)^*\varphi(t)=\varphi(t)+(M(\gamma)_t^*)^{-1}\int_t^T M(\gamma)_s^* K(\gamma)_s\varphi(s)\ ds. \tag{26}$$

Gong-Ma [7] でもこの部分積分の公式を用いて我々の結果 Theorem 2.4 とは違った形で COH formula を示している．さて我々の COH-formula を述べよう．$L^2([0,1]\to T_x\mathbb{H}^n)$ 上の有界線形作用素 $J(\gamma)_T$ を

$$J(\gamma)_T\varphi(t)=(M(\gamma)_t^*)^{-1}\int_t^1 M(\gamma)_s^*K(\gamma)_s\chi_{[0,T]}(s)\varphi(s)ds. \tag{27}$$

と定義する．$K(\gamma)_t$ は Definition 2.2 で定義されている．ここで $M(\gamma)_t$ $(0\le t<1)$ は次の $End(T_x\mathbb{H}^n)$ 値の ODE の解である．

$$M(\gamma)^{\cdot}_t = K(\gamma)_t M(\gamma)_t \tag{28}$$
$$M(\gamma)_0 = I \tag{29}$$

更に $N(\gamma)_t$ を次の $End(T_x\mathbb{H}^n)$ 値 ODE の解とする．

$$N(\gamma)^{\cdot}_t = \left(\frac{1-\sqrt{a}r_t\coth(\sqrt{a}r_t)}{1-t}\overline{\left(P_{\gamma,y}^{\perp}\right)}_t+\frac{n-1}{2}a+C(t,\gamma)_t\right)N(\gamma)_t \tag{30}$$
$$N(\gamma)_0 = I \tag{31}$$

$M(\gamma)_t = (1-t)N(\gamma)_t$ だから (27) は次のようになる.

$$J(\gamma)_T\varphi(t) \;=\; \frac{1}{1-t}\int_t^1 \left(N(\gamma)_s N(\gamma)_t^{-1}\right)^* \left\{-1+\left(1-\sqrt{a}r_s\coth(\sqrt{a}r_s)\right)\overline{\left(P_{\gamma,y}^{\perp}\right)}_t \right.$$
$$\left. +\left(\frac{n-1}{2}a + C(s,\gamma)_s\right)(1-s)\right\}\chi_{[0,T]}(s)\varphi(s)ds. \tag{32}$$

$x>0$ のとき,

$$1 - x\coth x \le 0 \tag{33}$$

ゆえ $N(\gamma)_t$ は次の評価を持つ. 任意の $0 \le t \le s \le 1$ について

$$\|N(\gamma)_s N(\gamma)_t^{-1}\|_{op} \le e^{(C_n(a)+\frac{n-1}{2})(s-t)a}. \tag{34}$$

ここで $C_n(a)$ は (23) にでてきているものである.

評価 (23) と Hardy の不等式

$$\left\{\int_0^1 \left\|\frac{1}{1-t}\int_t^1 \varphi(s)ds\right\|^2 dt\right\}^{1/2} \le 2\left\{\int_0^1 \|\varphi(s)\|^2 ds\right\}^{1/2} \tag{35}$$

と $x \ge 0$ のとき,

$$|1 - x\coth x| \le x \tag{36}$$

となることを用いて $\nu_{x,y}$-a.s. γ について

$$\|J(\gamma)_T\varphi\|_{L^2(0,1)} \;\le\; 2\left\{1+\sqrt{a}q(\gamma)+\left(C_n(a)+\frac{(n-1)}{2}\right)a\right\}e^{\left(C_n(a)+\frac{n-1}{2}\right)a}\|\varphi\chi_{[0,T]}\|_{L^2(0,1)} \tag{37}$$

$$q(\gamma) \;:=\; \sup_{0\le t\le 1} d(y,\gamma_t) \tag{38}$$

となる. さらに $L^2([0,1] \to T_x\mathbb{H}^n)$ 上の有界線形作用素 $J(\gamma)$ が存在して任意の $\varphi \in L^2([0,1] \to T_x\mathbb{H}^n)$ に対して

$$\lim_{T\to 1}\|J_T(\gamma)\varphi - J(\gamma)\varphi\| = 0 \tag{39}$$

となることがわかる.

$$L(\gamma) = I + J(\gamma) \tag{40}$$

と定める.

Theorem 2.4 (主定理 2) 任意の $F(\gamma) = f(\gamma_{t_1}, \ldots, \gamma_{t_n}) \in \mathfrak{F}C_b^\infty$ $(t_1 < \ldots < t_n \le T < 1)$ について

$$E^{\nu_{x,y}}[F(\gamma)|\mathfrak{F}_t] = E^{\nu_{x,y}}[F] + \int_0^t (H(s,\gamma), dw(s)), \quad (0 \le t \le 1) \tag{41}$$

ここで

$$H(s,\gamma) = E^{\nu_{x,y}}\left[L(\gamma)(D_0 F(\gamma)^{\cdot})(s)|\mathfrak{F}_s\right] \quad ds \otimes d\nu_{x,y}\text{-}a.s.\ (s,\gamma). \tag{42}$$

(42) は predictable projection を表す.

この定理の証明には Lemma 2.3 を用いる.

Theorem 1.1 の証明: $G_t = E^{\nu_{x,y}}[F^2 \mid \mathfrak{F}_t]$ とおく. Theorem 2.4 から,

$$G_t = E^{\nu_{x,y}}[F^2] + 2\int_0^t \left(E^{\nu_{x,y}}\left[F \cdot L(\gamma)(D_0 F(\gamma)^{\cdot})(s) \mid \mathfrak{F}_s\right], dw(s)\right).$$

伊藤の公式を $g(G_t) = G_t \log G_t$ に適用して,

$$\begin{aligned}
(1)\text{ の左辺} &= E[g(G_1) - g(G_0)] \\
&= \frac{1}{2} E^{\nu_{x,y}}\left[\int_0^1 \frac{d\langle G\rangle_t}{G_t}\right] \\
&\le 2E^{\nu_{x,y}}\left[\int_0^1 |L(\gamma)(D_0 F(\gamma)^{\cdot})(t)|^2\, dt\right].
\end{aligned}$$

ここで, (37), (39) より (1) を得る.

(注) (1) F は $P_{x,y}(\mathbb{H}^n)$ 上の H 微分で定義される Dirichlet 形式の定義域にはいるような関数ならば (42) の表示をもつ.

(2) M を $\mathbb{R}^n$ に Riemann 計量 g が与えられた Riemann 多様体とする. 一般に Riemmann 多様体上では z が y の cut-locus に含まれないなら $\exp_y w = z$ となる $w \in T_y M$ と $W(0) = 0$, $W(1) = v \in T_z M$ となる y から z に至る速度 $d(y,z)$ の測地線 $\{x(t)\}_{0 \le t \le 1}$ に沿う Jacobi field $W(t)$ を用いて

$$\begin{aligned}
&\nabla_z^2 \left\{\frac{d(y,z)^2}{2}\right\}(v,v) \\
&= \int_0^1 \left\{|\dot{\overline{W(x)}}_t|^2_{T_y\mathbb{H}^n} - \left(\overline{W(x)}_t, \overline{R(x)}_t(\overline{W(x)}_t, w)w\right)_{T_y\mathbb{H}^n}\right\} dt && (43) \\
&= \left(\dot{\overline{W(x)}}_1, \overline{W(x)}_1\right)_{T_y\mathbb{H}^n} && (44)
\end{aligned}$$

これを用いると

$$\text{Riemann 計量の微分が無限遠}\ (z \to \infty)\ \text{で早く}\ 0\ \text{に収束する} \tag{45}$$

ような Hadamard 多様体ならば, ある $\varepsilon > 0$ があって

$$\begin{aligned} \nabla_z^2 \left\{ \frac{d(y,z)^2}{2} \right\} &\geq \frac{1+\varepsilon}{2} I_{T_z M} \quad (\text{for any } z \in M) &(46)\\ \sup_z \left| \nabla_z^2 \left\{ \frac{d(y,z)^2}{2} \right\} \right| &< \infty &(47) \end{aligned}$$

が示される．更に (23) の f の対数微分の有界性 (このときは a は出てこないが) が示されれば Hardy の不等式の拡張：

$$J\varphi(t) = \frac{1}{(1-t)^\alpha} \int_t^1 (1-s)^{\alpha-1} \varphi(s) ds \quad (\alpha > 1/2)$$

とおくとき

$$\|J\varphi\|_{L^2[0,1]} \leq \frac{2}{2\alpha - 1} \|\varphi\|_{L^2[0,1]} \tag{48}$$

となるということを用いて LSI (1) が有界な $C(\gamma)$ を用いて成立することになる．この方向の結果を述べる．

$$\tilde{f}(t,y,z) = \sqrt{2\pi t}^n e^{\frac{d(y,z)^2}{2t}} p(t,y,z) \tag{49}$$

とおく．同じ仮定 (45) の下で

$$\inf_{0<t\leq 1, z\in\mathbb{R}^n} \tilde{f}(t,y,z) > 0 \tag{50}$$

となることを示した [2]．おそらく同じ仮定の下

$$\sup_{0<t\leq 1, z\in\mathbb{R}^n, i=1,2} |\nabla_z^i \tilde{f}(t,y,z)| < \infty \tag{51}$$

となると予想している．もちろん (23) を示すにはこれで十分である．しかし, hyperbolic space では (50) は成立していないが ((58) を見よ), (23) は成立していることに注意せよ．

3 (23) の証明について

良く知られているように断面曲率 $-a$ の $\mathbb{H}^n$ 上の熱核 $p_n^a(t,y,z)$ は距離 $r = d(y,z)$ の関数で $p_n^a(t,y,z) = k_n^a(t,r)$ と書ける．ここで, $k_n^a(t,r)$ は次の放物型方程式の解である．

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} k_n^a(t,r) &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} k_n^a(t,r) + \frac{1}{2}(n-1)\sqrt{a} \coth(\sqrt{a} r) \frac{\partial}{\partial r} k_n^a(t,r) &(52)\\ \lim_{t\to 0} k_n^a(t, d(y,z)) &= \delta_y(z). &(53) \end{aligned}$$

例えば $a = 1$ の式が [4] に見られる．この方程式から次の曲率のパラメータ a に関する scaling equality を得る．

$$k_n^a(t,r) = a^{n/2} k_n^1(at, \sqrt{a}r). \tag{54}$$

$k_n^a(t,r)$ は次の Millson により見い出された ([4] の 178 ページ,[5],[6]) recurrence relation をみたす．

$$k_{n+2}^1(t,r) = -\frac{e^{-nt/2}}{2\pi \sinh r}\frac{\partial}{\partial r}k_n^1(t,r). \tag{55}$$

さて

$$f_n^1(t,r) = e^{\frac{r^2}{2t}} k_n^1(t,r) \tag{56}$$

と定めると (55) から $f_n^1(t,r)$ は次の recurrence relation を満たすことがわかる．

$$f_{n+2}^1(t,r) = \left(-\frac{\partial f_n^1}{\partial r}(t,r) + \frac{r}{t}f_n^1(t,r)\right)\frac{e^{-nt/2}}{2\pi \sinh r}. \tag{57}$$

更に

$$f_3^1(t,r) = (2\pi t)^{-3/2}\frac{r}{\sinh r}e^{-\frac{t}{2}} \tag{58}$$

を用いて変形すると

$$f_{n+2}^1(t,r) = \sqrt{2\pi t}\exp\left(-\frac{(n-1)t}{2}\right) f_3^1(t,r) f_n^1(t,r)\left(1 - \frac{t}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\log f_n^1(t,r))\right), \tag{59}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\log f_{n+2}^1(t,r) = \frac{\partial}{\partial r}\log f_3^1(t,r) + \frac{\partial}{\partial r}\log f_n^1(t,r) + \frac{-t\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\log f_n^1(t,r)\right)}{1 - \frac{t}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\log f_n^1(t,r)\right)}. \tag{60}$$

(23) を示すために次の補題を示そう．

Lemma 3.1　非負の整数 k, l で $k + l \geq 1$ をみたすものについて，

$$\sup_{0<t\leq T, r\geq 0}\left|\left\{\frac{\partial^l}{\partial r^l}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^k\right\}\log f_n^a(t,r)\right| \leq C_{n,k,l}(aT)\sqrt{a}^{l+2k}. \tag{61}$$

ここで $C_{n,k,l}(\tau)$ は τ の単調増加関数である．

証明のスケッチ: 任意の $T > 0$ について

$$C_{n,k,l}(T) := \sup_{0<t\leq T, r>0}\left|\left\{\frac{\partial^l}{\partial r^l}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^k\right\}\log f_n^1(t,r)\right| < \infty. \tag{62}$$

を示せば十分である．というのは (54) より

$$\left\{\frac{\partial^l}{\partial r^l}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^k\right\}\log f_n^a(t,r)=\sqrt{a}^{l+2k}\left\{\frac{\partial^l}{\partial u^l}\left(\frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial u}\right)^k\right\}\log f_n^1(\tau,u)\Bigg|_{\tau=at,u=\sqrt{a}r}. \tag{63}$$

となるからである．(62) の証明は n に関する induction による．$\mathbb{H}^2$ では

$$f_2^1(t,r)=\frac{\sqrt{2}e^{-t/8}}{\sqrt{2\pi t}^3}\int_0^\infty\left\{\frac{\cosh\sqrt{u^2+r^2}-\cosh r}{u^2}\right\}^{-1/2}e^{-u^2/2t}du, \tag{64}$$

$\mathbb{H}^3$ では (58) で基本解は与えられる．これらを用いて実際に計算して induction の最初のステップが示せる．さて n から $n+2$ に移るためには (60) を用いる．もしもすべての $T>0$ について

$$\tilde{C}_n(T):=\inf_{r>0,0<t\le T}\left(1-\frac{t}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\log f_n^1(t,r)\right)\right)>0 \tag{65}$$

が示せれば帰納法の仮定から (62) が $n+2$ のとき, $k=1,l=0$, $k=0,l=1$ で示されることになる．高階微分も同様である．(65) 自身は n のときの帰納法の仮定と任意の r,t について

$$1-\frac{t}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\log f_n^1(t,r)\right)=\frac{e^{\frac{(n-1)t}{2}}k_{n+2}^1(t,r)}{k_3^1(t,r)k_n^1(t,r)}\cdot\frac{e^{-\frac{r^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}}>0 \tag{66}$$

であることから従う．(66) の等式は (59) から出る．$\tilde{C}_n(T)>0$ を induction の仮定 (62) を用いて証明しよう．まず任意の $0<\varepsilon<T$ と $R>0$ を固定する．(66) および (66) の右辺が t,r の連続関数であることから

$$\inf_{\varepsilon\le t\le T,0\le r\le R}\left(1-\frac{t}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\log f_n^1(t,r)\right)\right)>0 \tag{67}$$

また induction の仮定 (62) から

$$t\le\frac{1}{2C_{n,1,0}(T)}\wedge T\Longrightarrow 1-\frac{t}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\log f_n^1(t,r)\right)\ge\frac{1}{2}\quad(\text{for any } r>0) \tag{68}$$

$$r\ge 2TC_{n,0,1}(T)\Longrightarrow 1-\frac{t}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\log f_n^1(t,r)\right)\ge\frac{1}{2}\quad(\text{for any } 0<t\le T) \tag{69}$$

(67), (68), (69) すべてをあわせれば (65) が得られる．

(注)

$$\frac{\partial}{\partial r}\log f_3^1(t,r)=\frac{1}{r}(1-r\coth r)\le 0$$

ゆえ $\tilde{C}_3(T)\ge 1$ である.

(23) の証明:

$$\begin{aligned}
&\nabla_z^2\log f_n^a(t,r)\\
&\quad=\frac{\partial^2}{\partial r^2}\log f_n^a(t,r)\nabla_z r\otimes(\nabla_z r)^*+\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\log f_n^a(t,r)\right\}\left\{\nabla_z^2\left(\frac{r^2}{2}\right)-\nabla_z r\otimes(\nabla_z r)^*\right\}\\
&\quad=\frac{\partial^2}{\partial r^2}\log f_n^a(t,r)\nabla_z r\otimes(\nabla_z r)^*+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\log f_n^a(t,r)\cdot\sqrt{a}r\coth(\sqrt{a}r)P_{z,y}^{\perp}\\
&\quad:=I_1+I_2
\end{aligned}$$

Lemma 3.1 により, $\sup_{0<t\le 1,r\ge 0}|I_1|\le C_n(a)a$. また

$$\begin{aligned}
\sup_{0<t\le 1,r\ge 0}|I_2| &= \left|\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\log f_n^a(t,r)\cdot\sqrt{a}r\coth(\sqrt{a}r)\right|\\
&\le \sup_{0<\sqrt{a}r\le 1}\left|\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\log f_n^a(t,r)\cdot\sqrt{a}r\coth(\sqrt{a}r)\right|\\
&\quad+\sup_{\sqrt{a}r\ge 1}\left|\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\log f_n^a(t,r)\cdot\sqrt{a}r\coth(\sqrt{a}r)\right|\\
&\le C_n(a)a. \qquad\blacksquare
\end{aligned}$$

4 今後の問題

今後考えられる問題をいくつか述べる.

(1) 一般の Hadamard 多様体への一般化

上で述べたのは、hyperbolic space の上の pinned space の結果であったが、断面曲率が pinch されているような Hadamard 多様体に一般化できないだろうか? つまり、そのような空間で $u(t,z)=t\nabla_z^2\log p(t,y,z)$ が $t\to 0$ のとき (23) のような良い評価が得られないだろうか? 関連する仕事として [10],[8],[11] などがある. 注意すべきは、一般に $\liminf_{t\to 0}|u(t,z)|=\infty$ となることである. 実際、[11] で z が y の cut-locus の集合の中にあるとこのようなことが起こる.

$$\sup_{0<t\le 1}\|u(t,z)\| \le C_1\left(C_2 d(y,z)+C_3\right) \tag{70}$$

$$u(t,z)\text{ の最大固有値} \le -\frac{1}{2} \tag{71}$$

のような評価が証明できれば Theorem 1.1, Theorem 2.4 のような定理が証明できる．とくに、$C_2 = 0$ とできれば拡散係数 $C(\gamma)$ は定数に置き換えられる．

(2) Driver の heat kernel LSI との関連:

Driver は loop group 上の heat kernel measure について LSI を証明した． heat kernel measure は pinned measure に絶対連続であることがわかる．drift の変換は測度の絶対連続な範囲での有限次元的な変換であるが、無限次元的な変換の "よい" 一般論があって heat kernel measure は pinned measure から得られるのだろうか?

また、このような変換の一般論は一般の Riemann 多様体上でもあるのだろうか?

heat kernel measure に関して COH-formula は証明できるのだろうか? この測度のもとでの Filtration に adapted なブラウン運動はなにだろうか?

参考文献

[1] S. Aida, Logarithmic derivatives of heat kernels and logarithmic Sobolev inequalities with unbounded diffusion coefficients on loop spaces, to appear in J. Funct. Anal.

[2] S. Aida, A remark on precise Gaussian bounds on heat kernels, preprint, 2000.

[3] M. Capitaine, E. Hsu and M. Ledoux, Martingale representation and a simple proof of logarithmic Sobolev inequalities on path spaces, Electronic Communications of Probability **2** (1997), 71–81.

[4] E. B. Davies, Heat Kernels and Spectral Theory, Cambridge University Press, (1989)

[5] E.B. Davies and N. Mandouvalos, Heat kernel bounds on hyperbolic space and Kleinian groups, Proc. London Math. Soc. (3) **57** (1988), 182–208.

[6] A. Debiard, B. Gaveau and E. Mazet, Théorèms de comparison en géometrie Riemannienne, Research Inst. Math. Sci., Kyoto Univ. **12**, 391–425, (1976).

[7] F-Z. Gong and Z-M. Ma, The log-Sobolev Inequality on Loop Space Over a Compact Riemannian Manifold, J. Funct. Anal. **157** (1998), 599–623

[8] R. Hamilton, A matrix Harnack estimate for the heat equation, Comm. Anal. & Geom. 1#1 (1993), 113–126.

[9] E. Hsu, Analysis on Path and Loop Spaces ,"Probability Theory and Applications" LAS/PARK CITY Mathematics Series, **6**, edited by Elton P. Hsu, S. R. S. Varadhan, American Mathematical Society, Institute for Advanced Study, (1999), 279–347.

[10] P. Li and S.T. Yau, On the parabolic kernel of the Schrödinger operator, Acta Math. **156** (1986), 153–201

[11] P. Malliavin and D.W. Stroock, Short time behavior of the heat kernel and its logarithmic derivative, J. Diff. Geom. **44** (1996), 550–570.

[12] J. Milnor, モース理論, (志賀浩二訳), 吉岡書店

[13] D.W. Stroock, An estimate on the Hessian of the heat kernel ,Itô's Stochastic Calculus and Probability Theory, ,355–371, Springer, Tokyo, (1996).

[14] D.W. Stroock, An Introduction to the Analysis of Paths on a Riemannian Manifold, AMS, ISBN 0-8218-2020-6, 269 pages, (2000).