確率微分方程式の解の近似について

会田 茂樹

2009 年 2 月 24 日

はじめに

オプションなどの金融商品の価格はブラウン運動などの確率過程の関数を含んだ確率変数の期待値 (積分) で表される．

一例としてもっとも単純なブラックショールズ モデルを考える．

債券 (安全商品) 価格 S_t^0, 株式価格 S_t^1 のみからなるブラックショールズ モデルでは S_t^0, S_t^1 は次の確率微分方程式に従う。r: 利率， σ: ボラティリティ と呼ばれる定数で B_t は 1 次元ブラウン運動である.

$$\begin{aligned} dS_t^0 &= rS_t^0 dt, \\ dS_t^1 &= S_t^1(\mu dt + \sigma dB_t), \end{aligned}$$

これを解くと

$$\begin{aligned} S_t^0 &= S_0^0 e^{rt}, \\ S_t^1 &= S_0^1 e^{\mu t + \sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2} t}. \end{aligned}$$

満期時刻 T で $f(S_T^1)$ の価値のあるヨーロピアンオプションの時刻 0 での価格は期待値

$$I = e^{-rT} E[e^{-\theta B_T - \frac{1}{2}\theta^2 T} f(S_T^1)], \quad \theta := \frac{\mu - r}{\sigma}$$

で表される．I は拡散方程式の解での表示を持つ．

$I = u(T, S_0^1)$ ここで $u(t,x)$ は次の拡散方程式の解である．

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) &= \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + rx\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) - ru(t,x) \\
u(0,x) &= f(x)
\end{aligned}
$$

従って，I を計算するには，上記の偏微分方程式の数値計算か期待値の計算をすることになる．

今は株価過程が非常に単純な場合を考えた．さらに一般な確率微分方程式に従う場合も完備市場のようなよい状況ならヨーロピアンオプションの価格は

(1) 確率微分方程式の解 X_t を用いた期待値 $E[f(X_t)]$

(2) 拡散方程式の解

で書けることになる．複数の株式を考えると X_t は多次元拡散過程になり，その次元が非常に高いと通常の偏微分方程式の数値計算法ではよい近似が得られない．ここでは，(1) の期待値の近似計算法について話をする．

話の流れ

1. 確率微分方程式の定義
2. 強近似・弱近似
3. Lyons-Victoir の弱近似理論

常微分方程式から確率微分方程式へ

- $V(x) = {}^t\big(V^1(x), \ldots, V^N(x)\big)$ $(x \in \mathbb{R}^N)$, ここで $V^j \in C_b^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, すなわち V はすべての微分が有界なベクトル場.

- $\mathbb{R}^N$ 上の初期値 x の常微分方程式 (力学系)

$$\frac{d}{dt}X_t(x) = V(X_t(x)) \quad t \geq 0, \qquad X_0(x) = x$$

は積分形

$$X_t(x) = x + \int_0^t V(X_s(x))ds, \qquad t \geq 0, \qquad (1)$$

に書き換えられる.

この積分方程式は

- $\mathbb{R}^N$ 上の滑らかな関数 f すべてについて

$$f(X_t(x)) = f(x) + \int_0^t (Vf)(X_s(x))ds, \qquad t \geq 0,$$

が成立することと言い換えられる．ただし，

$$Vf(x) = \sum_{j=1}^{N} V^j(x) \frac{\partial f}{\partial x_j}(x).$$

時間に依存する次のような常微分方程式を考える．

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}X_t(x) &= \sum_{i=0}^{d} V_i(X_t(x))\dot{\gamma}_t^i \qquad (2)\\
X_0(x) &= x. \qquad (3)
\end{aligned}
$$

ただし $V_i \in C_b^{\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ $(0 \le i \le d)$.
γ_t^i $(0 \le i \le d, t \ge 0)$ は t の滑らかな実数値関数．このとき解は $\gamma_t = {}^t\left(\gamma_t^0, \ldots, \gamma_t^d\right)$ に依存するので，$X_t(x, \gamma)$ と書く．これは，

$$
X_t(x,\gamma) = x + \sum_{i=0}^{d} \int_0^t V_i(X_s(x,\gamma))\dot{\gamma}^i(s)ds \qquad (4)
$$

と書き換えられる．また $\mathbb{R}^N$ 上の関数 f について

$$f(X_t(x,\gamma)) = f(x) + \sum_{i=0}^{d} \int_0^t (V_i f)(X_t(x,\gamma)) \dot{\gamma}_t^i dt$$

が成立する．

確率微分方程式は $\gamma(t)$ を $d+1$ 次元確率過程
$B_t(\omega) = {}^t(B_t^0(\omega), \ldots, B_t^d(\omega))$ に置き換えて得られるもの，ただし

(a) $B_t^0(\omega) = t$ は deterministic,

(b) $B_t(\omega) = {}^t(B_t^1, \ldots, B_t^d)$ は d 次元ブラウン運動

で，積分形は Stratonovich 型確率積分方程式

$$X_t(x,B) = x + \sum_{i=0}^{d} \int_0^t V_i(X_s(x,B)) \circ dB_s^i(\omega). \quad (5)$$

となる．

$$\int_0^t V_0(X_s(x,B)) \circ dB_s^0 = \int_0^t V_0(X_s(x,B))ds.$$

しかし $i \neq 0$ のとき $t \to B_t^i(\omega)$ は微分不可能なので，

$$\int_0^t V_i(X_s(x,B)) \circ dB_s^i(\omega)$$

に意味をつける必要がある．

- (5) の解の意味:

$X_t(x,B)$ はブラウン運動の時刻 t までの部分 $\{B_s(\omega); 0 \le s \le t\}$ のみで決まる確率変数で，$[0,t]$ の分割 $\Delta : 0 = t_0 < \ldots t_n = t$ を細かくするとき，

$$X_t(x,B) = x + \sum_{i=0}^{d} \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{k=1}^{n} V_i(X_{\frac{t_k+t_{k-1}}{2}}(x,B)) \left(B^i_{t_k} - B^i_{t_{k-1}}\right) \quad (6)$$

をみたす連続確率過程 (セミマルチンゲール) である．

- Itô 積分への書き換え

(5) は次のように書き換えられる．

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{X}_t(x,B) &= x + \int_0^t \tilde{V}_0(\boldsymbol{X}_s(x,B))ds \\
&\quad + \sum_{i=1}^d \int_0^t V_i(\boldsymbol{X}_s(x,B))dB_s^i(\omega), \qquad (7)
\end{aligned}
$$

ただし，$\tilde{V}_0^j(x) = V_0^j(x) + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^d \dfrac{\partial V_i^j}{\partial x_k}(x) V_i^k(x),$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t V_i(\boldsymbol{X}_s(x,B))dB_s^i(\omega) \\
&\quad := \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_k V_i(\boldsymbol{X}_{t_{k-1}}(x,B)) \left(B_{t_k}^i - B_{t_{k-1}}^i\right) \qquad (8)
\end{aligned}
$$

ブラウン運動の性質

(1) $t \geq s \geq 0$ のとき $B_t - B_s \overset{law}{=} N(0, (t-s)I)$

(2) $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$ とすると確率変数

$(B_{t_1} - B_{t_0}, \cdots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$ は独立

(3) $t \to B_t(\omega)$ は連続だが微分不可能

確率微分方程式の性質

$X_t(x,B)$ を $\mathbb{R}^N$ 上の Stratonovich SDE の解とする：

$$X_t(x,B) = x + \sum_{i=0}^{d} \int_0^t V_i(X_s(x,B)) \circ dB_s^i(\omega) \quad (9)$$

$X_t(x,B)$ は次のように拡散方程式と関連する．

Theorem 1 $\mathbb{R}^N$ 上の有界関数 f に対して
$u(t,x) = E[f(X_t(x,B))]$ と定義すると $u(t,x)$ は次の方程式をみたす．

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) &= (Lu)(t,x) && (10)\\
u(0,x) &= f(x) && (11)
\end{aligned}
$$

ここで $Lf(x)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}(V_i^2 f)(x)+V_0 f(x).$

(10) を解くには期待値の計算をすればよい．$X_t(x,B)$ が B の簡単な関数ならば計算は簡単、しかし一般にはそうではない．

解が簡単な形になるケース

- $\mathbb{R}^N$ 上のベクトル場 V による常微分方程式

$$\frac{d}{dt}X_t(x) = V(X_t(x)) \quad t \in \mathbb{R}, \qquad X_0(x) = x$$

の解 $X_t(x)$ を $\exp(tV)(x)$ と書く.

- 写像 $x \to \exp(tV)(x)$ は微分同相写像である.

Theorem 2 ベクトル場$\{V_i\}_{i=0}^{d}$が可換，*i.e.*,

$$[\boldsymbol{V}_i, \boldsymbol{V}_j] \;=\; \sum_{k=1}^{N}\left(\boldsymbol{V}_i^k \frac{\partial \boldsymbol{V}_j}{\partial \boldsymbol{x}_k} - \boldsymbol{V}_j^k \frac{\partial \boldsymbol{V}_i}{\partial \boldsymbol{x}_k}\right) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{0} \le \forall \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j} \le \boldsymbol{d},$$

のとき

$$X_t(x, B) = \exp\left(tV_0\right) \circ \exp\left(B_t^1 V_1\right) \circ \cdots \circ \exp\left(B_t^d \boldsymbol{V}_d\right)(x),$$

上記$\circ$は写像の合成を表し，合成の順番に依存しない．

定理の帰結と注意

- ベクトル場が可換のとき，SDE の解は $d+1$ 個の常微分方程式を解き，標準正規分布の乱数を用いて近似できる.
- $[V_i, V_j] = 0\ 1 \le \forall i, j \le d$ だけを仮定しても, もう少し複雑になるが，同様な事が言える．
- しかし，$\exists i, j(\ge 1)$, $[V_i, V_j] \ne 0$ のときは単純では無い．実際，可換な場合と違い汎関数 $B \to X_t(x, B)$ は不連続な関数である．

確率微分方程式の解の近似定理 (ODE との関連)

$d+1$ 次元過程 $B_t(\omega)$ を折れ線近似した確率過程 $B_{(n),t}(\omega)$ を導入する：

$$\begin{aligned} B_{(n),t}(\omega) &= B_{\frac{k-1}{n}T}(\omega) \\ &\quad + \frac{nt-(k-1)T}{T}\left(B_{\frac{k}{n}T}(\omega) - B_{\frac{k-1}{n}T}(\omega)\right) \\ &\qquad \left(\frac{k-1}{n}T \le t \le \frac{k}{n}T, 1 \le k \le n \text{ のとき}\right) \end{aligned}$$

$X_t^{PL,n}(x,B)$ をランダムな係数を持つ常微分方程式

$$X_t^{PL,n}(x,B) = x + \sum_{i=0}^{d} \int_0^t V_i(X_s^{PL,n}(x,B)) \dot{B}^i_{(n),s}(\omega) ds \tag{12}$$

の解とする.

Theorem 3 任意の $0 < \theta < 1$ に対して

$$E\left[\sup_{0 \le t \le T} |X_t(x,B) - X_t^{PL,n}(x,B)|^2\right] \le \frac{C}{n^\theta}.$$

上記定理で $\theta = 1$ とはできない[a]. これは最後のページで説明する.

[a] ここが修正箇所.

確率微分方程式の数値解法

(I)　確率微分方程式の離散近似

(II)　離散化した近似方程式のランダムな量を乱数で置き換えて近似解の実現値を得る．

計算機で計算するためには上記のステップが必要．以下の定義で，$\frac{k-1}{n}T < t \leq \frac{k}{n}T$ のとき $X_t^{(n)}(x, B)$ はブラウン運動の有限個の差分

$$\{B_{\frac{i}{n}T}(\omega) - B_{\frac{i-1}{n}T}(\omega); 1 \leq i \leq k\}$$

で決まる確率変数である．

弱近似・強近似

- $X_t(x,B)$ と同じ確率空間上に定義された N 次元確率過程 $X_t^{(n)}(x,B)$ が

$$E[\sup_{0\le t\le T}|X_t^{(n)}(x,B)-X_t(x,B)|^2]\le\frac{C}{n^{2p}}$$

をみたすとき p 次の強近似と言う．

- N 次元確率変数 $X_T^{(n)}$ が存在して任意の C_b^4 関数 f に対して

$$|E[f(X_T(x,B))]-E[f(X_T^{(n)})]|\le\frac{C}{n^p}.$$

となるとき $X_T^{(n)}$ は $X_T(x,B)$ の p 次の弱近似と言う．

- 区間の分割は等分割以外の分割で考えてもよい．

- $X_t^{PL,(n)}(x,B)$ は $X_t(x,B)$ の $\frac{\theta}{2}$ 次の強近似である．しかし $X_t^{PL,(n)}(x,B)$ を得るには各ステップごとに常微分方程式を解かねばならない．

- 次の Euler-丸山近似 $X_t^{EM,(n)}(x,B)$ の方が簡単である．$X_t^{EM,(n)}(x,B)$ を次のように定める．

- $\boldsymbol{X_t^{EM,(n)}(x,B)}$ の定義

(i) $\boldsymbol{X_0^{EM,(n)}(x,B) = 0}$ とする．

(ii) $\boldsymbol{X_{\frac{k-1}{n}T}^{EM,(n)}(x,B)}$ $\boldsymbol{(1 \le k \le n)}$ が定まったとして
$\boldsymbol{X_{\frac{k}{n}T}^{EM,(n)}(x,B)}$ を次で定める．

$$\boldsymbol{X_{\frac{k}{n}T}^{EM,(n)}(x,B) = X_{\frac{k-1}{n}T}^{EM,(n)}(x,B) + \sum_{i=1}^{d} V_i\left(X_{\frac{k-1}{n}T}^{EM,(n)}(x,B)\right)\left(B_{\frac{k}{n}T} - B_{\frac{k-1}{n}T}\right) + \tilde{V}_0\left(X_{\frac{k-1}{n}T}^{EM,(n)}\right)\frac{T}{n}} \tag{13}$$

(iii) $\frac{k-1}{n}T \le t < \frac{k}{n}T$ のとき

$$X_t^{EM,(n)}(x,B) = X_{\frac{k-1}{n}T}^{EM,(n)}(x,B).$$

(注) 線形補間や $B_t - B_{\frac{k-1}{n}T}$ を用いる補間法もありうるが，これらの補間でも定理 4 は成立する．

Theorem 4 (Milshtein, Kloden-Platen, Faure)
$X^{EM,(n)}$ は $\frac{1}{2}$ 次の強近似である．すなわち

$$E[\sup_{0\le t\le T} |X_t^{EM,(n)}(x,B) - X_t(x,B)|^2] \le \frac{C}{n}$$

弱近似について

Theorem 5 (伊藤の公式) f を $\mathbb{R}^N$ 上の滑らかな関数とすると

$$f(X_t(x,B)) = f(x) + \sum_{i=0}^{d} \int_0^t (V_i f)(X_s(x,B)) \circ dB_s^i(\omega)$$

これを用いると Euler-丸山近似，折れ線近似は 1 次の弱近似であることがわかる．

Theorem 6 (Kloden and Platen, Talay and Tubaro)

$$|E[f(X_T)] - E[f(X_T^{EM,(n)})]| \leq \frac{C}{n} \tag{14}$$

$$|E[f(X_T)] - E[f(X_T^{PL,(n)})]| \leq \frac{C'}{n} \tag{15}$$

(注)

- **この式は強近似の式から直ち に出るわけではない．**
- L **が楕円性を持てば** (**より一般的には一様** Hörmander **条件を満たせば**)，(14) **は** f **が単に有界可測のみでも成立する** (Bally and Tally)．

さらに高次の近似について

これまで，

強近似：$\frac{1}{2}$ 近似

弱近似：1 近似

の例をあげた．さらに強い近似を得るには例えば，伊藤の公式を繰り返し用いて得られる確率的テイラー展開を用いる (Kloden-Platen, Kusuoka(楠岡近似 (1998) と呼ばれるもの),.....).

ここでは，Lyons-Victoir の弱近似 (有限次元の cubature formula を用いるアプローチ) についてのみ述べるので，その形で説明する．

確率的テイラー展開

$$\boldsymbol{\mathcal{A}_m := \left\{ (i_1, \ldots, i_k) \in \{0, 1, \ldots, d\} \;\middle|\; k + \sharp\{j \mid i_j = 0\} \leq m \right\}}$$

Theorem 7 (確率的テイラー展開)

$$f(X_t(x,B)) =$$

$$\sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in\mathcal{A}_m} V_{i_1}\cdots V_{i_k}f(x)\int_{0<t_1<\ldots<t_k<t}\circ dB_{t_1}^{i_1}\cdots\circ dB_{t_k}^{i_k}$$

$$+R_m(t,x,f),$$

$$\sup_x \|R_m(t,x,f)\|_{L^2(P)}$$

$$\leq Ct^{\frac{m+1}{2}}\sup_{(i_1,\ldots,i_k)\in\mathcal{A}_{m+2}\setminus\mathcal{A}_m}\|V_{i_1}\cdots V_{i_k}f\|_\infty$$

具体的には

$$R_m(t,x,f) = \sum_{(i_1,\dots,i_k)\in\mathcal{A}_m,(i_0,i_1,\dots,i_k)\notin\mathcal{A}_m} \int_{0<t_0<t_1<\cdots<t_k<t} V_{i_0}V_{i_1}\cdots V_{i_k} f(X_{t_0}(x,B)) \circ dB^{i_0}_{t_0} \circ dB^{i_1}_{t_1} \circ \cdots \circ dB^{i_k}_{t_k}.$$

$\boldsymbol{m = 0}$ は伊藤の公式と同じ．

$\boldsymbol{m = 1}$

$$\boldsymbol{f(X_t) = f(x) + \sum_{i=1}^{d} V_i f(x) B_t^i + \int_0^t V_0 f(X_{t_0}) dt_0 + \sum_{1 \le i \le d, 0 \le j \le d} \int_0^t \left(\int_0^{t_i} V_j V_i f(X_{t_j}) \circ dB_{t_j}^j \right) \circ dB_{t_i}^i}$$

$m = 2$

$$
\begin{aligned}
f(X_t) = {} & f(x) + \sum_{i=0}^{d} V_i f(x) B_t^i \\
& + \sum_{1 \le i \le d, 0 \le j \le d} V_j V_i f(x) \int_0^t B_{t_i}^j \circ dB_{t_i}^i \\
& + \sum_{0 \le i \le d} \int_0^t \left(\int_0^{t_0} V_i V_0 f(X_{t_i}) \circ dB_{t_i}^i \right) dt_0 \\
& + \sum_{\{(k,i,j) \mid 1 \le i \le d, 0 \le j,k \le d\}} \int_0^t \Big(\int_0^{t_i} \Big(\int_0^{t_j} V_k V_j V_i f(X_{t_k}) \\
& \qquad \circ dB_{t_k}^k \Big) \circ dB_{t_j}^j \Big) \circ dB_{t_i}^i
\end{aligned}
$$

Cubature formula in finite dimensions

$f:[-1,1]$ 上の関数, $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx$ の Gauss による Legendre の球関数 P_n を用いた近似計算法 (高木貞治著「解析概論」にも見られる).

$x_1,\dots,x_n$ を $P_n(x)$ のゼロ点とする．正数 $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ ($\sum_j \lambda_j = 2$ をみたす) が存在して任意の $2n-1$ 次以下の多項式 Q に対して，

$$\int_{-1}^{1} Q(x)dx = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j Q(x_j).$$

これは，f が $2n-1$ 次多項式でよく近似できる関数ならば

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx$$

の近似計算が有限個の値

$$\{f(x_1), \ldots, f(x_n)\}$$

の重みつき和で近似できることを示している.

さらに一般に次の定理が成り立つ (Tchakaloff(1971), Putinar(1997)).

Theorem 8 $X = (X_1, \ldots, X_N)$ を $\mathbb{R}^N$ 値確率変数とする．$R_m[x_1, \ldots, x_N]$ を m 次以下の N 変数多項式全体のベクトル空間とする．任意の $P \in R_m[x_1, \ldots, x_N]$ に対して $E[|P(X_1, \ldots, X_N)|] < \infty$ とする．

このとき $L(\leq \dim R_m[x_1, \ldots, x_N] = {}_{N+m}C_N)$ 個以下の点 $z_j = (z_j^k)_{k=1}^N \in \mathbb{R}^N$ $(1 \leq j \leq L)$ と正数 $\{\lambda_j\}_{j=1}^L$ $(\sum_j \lambda_j = 1$ をみたす$)$ が存在して任意の $P \in R[x_1, \ldots, x_N]$ に対して

$$E[P(X_1, \ldots, X_N)] = \sum_{j=1}^{L} \lambda_j P(z_j^1, \ldots, z_j^N).$$

例 N.Victoir (2004)

N **次元標準正規分布，**$m = 5$ **の時，**$L = O(N^3)$ **とできる．**

$N = 7$ **のとき** $L = 57$, **これは最良．** (by Möller).

Cubature on Wiener space

Theorem 9 (Lyons and Victoir(2004)) m を自然数とする．
$L(\leq \dim \mathcal{A}_m)$ 個の有界変動なパス $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ と正数
$\{\lambda_1, \ldots, \lambda_L\}$ ($\sum_j \lambda_j = 1$ をみたす) が存在してすべての
$(i_1, \ldots, i_k) \in \mathcal{A}_m$ に対して

$$E\left[\int_{0<t_1<\cdots<t_k<1} \circ dB_{t_1}^{i_1} \circ \cdots \circ dB_{t_k}^{i_k}\right] = \sum_{j=1}^{L} \lambda_j \int_{0<t_1<\cdots<t_k<1} d\gamma_j^{i_1}(t_1) \cdots d\gamma_j^{i_k}(t_k).$$

(注) 証明は Tchakaloff の定理と Lie 群論で有名な
Baker-Campbell-Hausdorff の公式の一般化にあたる Chen-Strichartz
formula (あるいは Chow-Rashevskii の定理) による．

Lyons and Victoir による近似アルゴリズム

m を固定．$\{\gamma_j\}, \{\lambda_j\}$ を Lyons-Victoir のパス，重み.

$$\gamma_{T,j}(t) := \sqrt{T}\gamma_j\left(t/T\right) \quad (0 \leq t \leq T).$$

一般に有界変動なパス $\gamma_t = \left(\gamma_t^i\right)_{i=1}^d$ に対して $X_t(x,\gamma)$ を ODE

$$X_t(x,\gamma) \;=\; x + \sum_{i=0}^{d} \int_0^t V_i(X_t(x,\gamma))d\gamma_t^i$$

の解とする．ただし $\gamma_t^0 = t$ である．

Theorem 10

$$\sup_x \left| E\left[f(X_T(x,B))\right] - \sum_{j=1}^{L} \lambda_j f\left(X_T(x,\gamma_{T,j})\right) \right|$$
$$\le C\sqrt{T}^{m+1} \sup_{(i_1,\ldots,i_k)\in\mathcal{A}_{m+2}\setminus\mathcal{A}_m} \|V_{i_1}\cdots V_{i_k} f\|_\infty. \quad (16)$$

C は T に依存しない．

- T が小さい時はよい評価．T が大きい時は，区間 $[0,T]$ を分割して各小区間で上記評価を用いる (マルコフ連鎖による近似)．

$[0,T]$ の分割： $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$

$s_l := t_l - t_{l-1}$

マルコフ連鎖 $\{Y_i\}_{i=0}^{n}$ を次で定める：

$$P(Y_{l+1} = X_{s_{l+1}}(x, \gamma_{s_{l+1},j}) \mid Y_l = x) = \lambda_j.$$

Theorem 11

$$\sup_x \left| E[f(X_T(x,B))] - E\left[f(Y_n) \mid Y_0 = x\right] \right|$$

$$\leq C \sum_{i=1}^{n} s_i^{\frac{m+1}{2}} \sup_{(i_1,\ldots,i_k) \in \mathcal{A}_{m+2} \setminus \mathcal{A}_m} \| V_{i_1} \cdots V_{i_k} P_{T-t_i} f \|_\infty.$$

(注)

- $[0,T]$ の n 等分とすると $s_l = \frac{T}{n}$．$m=3$ とする．f が十分滑らかならば右辺 $=O(\frac{1}{n})$．この近似は 1 次．$m=5$ のとき，$O(\frac{1}{n^2})$ で 2 次の近似．
- ベクトル場 $\{V_0, V_1, \ldots, V_d\}$ が UFG(=uniform finite generation) 条件 (Höemander 条件よりゆるい) を満たせば以下のように改良される (本質的に楠岡氏の結果)：

$$\text{左辺} \quad \leq \quad C\|\nabla f\|_\infty \left(s_n^{1/2} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{s_i^{(m+1)/2}}{(T-t_i)^{m/2}} \right).$$

例 UFG が成立するとする．$\gamma > 0$ とし

$t_i := T\left(1 - \left(1 - \frac{i}{n}\right)^{\gamma}\right) \quad (0 \le i \le n)$

(i) $0 < \gamma < m - 1$ のとき

$$\text{左辺} \le \frac{C}{n^{\gamma/2}} \|\nabla f\|_{\infty}.$$

(ii) $\gamma = m - 1$ のとき

$$\text{左辺} \le C \frac{\log n}{n^{(m-1)/2}} \|\nabla f\|_{\infty}.$$

(iii) $\gamma > m - 1$ のとき

$$\text{左辺} \le \frac{C}{n^{(m-1)/2}} \|\nabla f\|_{\infty}.$$

(注 1) Lyons-Victoir(2004) では degree $m = 3$, degree $m = 5$ のときに具体的なパス γ_j と重み λ_j の構成について述べている．γ_j は区分的に直線である折れ線である．degree 5 は複雑なので，degree 3 について述べる．

Proposition 12 $\{z_1, \ldots, z_L\}$, $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_L\}$ を $\mathbb{R}^d$ 上の標準正規分布に対する 3 次以下の多項式に対する *cubature formula* に現れる点，重みとする．

$$\gamma_j(t) = z_j t \quad (1 \leq j \leq L), \quad \{\lambda_1, \ldots, \lambda_L\}$$

は *Wiener* 空間上の $m = 3$ のときの *cubature formula* をみたす．

(注2) $B_t(\omega)$ から折れ線近似のパス $B_{(1),t}(\omega) = tB_1(\omega)$ を作ると $(i_1,\ldots,i_k) \in \mathcal{A}_3$ のとき

$$\begin{aligned} & E\left[\int_{0<t_1<\cdots<t_k<1} \circ dB_{t_1}^{i_1} \circ \cdots \circ dB_{t_k}^{i_k}\right] \\ & \qquad = E\left[\int_{0<t_1<\cdots<t_k<1} dB_{(1),t_1}^{i_1} \cdots dB_{(1),t_k}^{i_k}\right]. \end{aligned}$$

従って，この $B_{(1),t}(\omega)$ を用いても degree 3 の場合，同じ評価を得る．これで得られるマルコフ連鎖は $X_t^{PL,(n)}(x,B)$ と同じである．

(注3) 他に関連する近似として，二宮・Victoir(2008), 藤原による結果がある．

まとめ

1 **確率微分方程式の定義**

2 **強近似・弱近似**

3 Lyons-Victoir **の弱近似理論**

$\theta = 1$ とできない理由

一番単純な $V_i(x) = e_i$ $(1 \le i \le d)$ の単位ベクトルのときを考える．この場合 $X_t^{PL,n} = B_{(n)}(t)$，すなわちブラウン運動の折れ線近似そのものである．ゆえに $(t_k^n = kT/n$ とした) n 個の $[0, T]$ 区間の確率過程の族

$$\{\sqrt{n}(B_{(t/n)+t_{k-1}^n}(\omega) - B_{(n),(t/n)+t_{k-1}^n}(\omega))\}_{0 \le t \le T}$$

は $[0, T]$ 区間で定義された標準ブラウン運動を $t = 0, T$ で 0 と条件つけた pinned Brownian motion の族となる．
従って，この独立な n 個の pinned motion を
$B_0^k(t)$ $(1 \le k \le n)$ とすると

$$
\begin{aligned}
&nE\left[\sup_{0\le t\le T}|B_t^{PL,(n)}(t)-B_t|^2\right]\\
&=E\left[\max_{1\le k\le n}\max_{0\le t\le T}|B_0^k(t)|^2\right].
\end{aligned}
$$

一般に $+\infty$ の近傍に台をもつ共通の確率分布に従う独立確率変数列 $\{X_n\}$ に対して $\lim_{n\to\infty}E[\max_{1\le k\le n}X_k]=+\infty$ なので上記の右辺の量は発散する．従って $\theta=1$ とできない．正確なオーダーには $\log n$ などの修正項がつくはずである．