

Short Time Asymptotics of Transition Probability

1 序

$(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ を確率空間 $(\Omega, \mathfrak{B}, m)$ 上の Dirichlet 形式とし

$$\mathcal{E}(u, u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \Gamma(u, u) dm = (-Lu, u). \quad (1.1)$$

とする. L は generator, $\Gamma(\cdot, \cdot)$ は square field operator で local property を満たすとする. すなわち $f \in C_b^\infty(\mathbb{R})$, $u, v \in D(\mathcal{E})$ に対して

$$\Gamma(f(u), g(v)) = f'(u)g'(v)\Gamma(u, v)$$

とする. P_t を対応する拡散半群とする. P_t が熱核 $p(t, x, y)$ をもつとする. Ω 上に適当な距離関数 $d(x, y)$ が存在して $p(t, x, y)$ の $t \rightarrow 0$ のときのつぎのような漸近挙動が成立するとき

$$\lim_{t \rightarrow 0} t \log p(t, x, y) = -\frac{d(x, y)^2}{2} \quad (1.2)$$

(1.2) を Varadhan 型の評価 (Varadhan's asymptotics, Varadhan formula) という. 拡散半群が熱核をもたないときも推移確率などを考えて同種の asymptotics を考えることができる. A, B を Ω の正の確率をもつ可測集合とする.

$$P_t(A, B) = (P_t 1_B, 1_A) \quad (1.3)$$

は A からスタートしたプロセスが B に到達する確率を与えているがこの確率の $t \rightarrow 0$ の振る舞いを考えよう. 可測集合 A, B にたいして A, B の間の距離を

$$d(A, B) = \sup_{\Gamma(f, f) \leq 1} \text{essinf}_{x \in A, y \in B} (f(x) - f(y)) \quad (1.4)$$

と定義するとき次のような asymptotics を証明したいのである.

$$\lim_{t \rightarrow 0} -t \log P_t(A, B) = \frac{d(A, B)^2}{2}. \quad (1.5)$$

この問題は S. Fang [6] により考えられた。筆者も本研究課題の研究期間の最中に論文 [3],[4] を書いた。これらについてはプレプリントを本成果報告書に付することにする。論文 [3],[4] の完成後、この問題に関して日野 [8], Ramirez [10] などの著しい進展があった。ここでは Ramirez の結果の概要とそれ以前に日野氏により得られていた結果を書いておくことにする。また今後の問題も最後のセクションで述べた。(1.5)において $\liminf -t \log P_t(A, B)$ が右辺で下から評価されるのは Lyon-Zheng 分解を用いることにより拡散半群にほとんどなんの仮定もなしで証明される。以下はトリヴィアルでない $\limsup -t \log P_t(A, B)$ の上からの評価についてのみふれる。

2 Ramirez の結果

以下では Dirichlet form は spectral gap をもつとする。すなわちある $\lambda > 0$ が存在して任意の $u \in D(\mathcal{E})$ に対して、

$$\lambda \int_{\Omega} (u - \langle u \rangle)^2 dm(x) \leq \mathcal{E}(u, u) \quad (2.1)$$

が成立するとする。 $\langle u \rangle = \int_{\Omega} u(x) dm(x)$ と書いた。 1_A を A の定義関数とする。また

$$1_A^\delta(x) = \begin{cases} 1 & x \in A, \\ \delta & x \in A^c. \end{cases} \quad (2.2)$$

とおく。

$$\int_{\Omega} -\log 1_A^\delta(x) dm(x) = (1 - m(A)) \log\left(\frac{1}{\delta}\right) \quad (2.3)$$

である。

$$w_A^\delta(t, x) = \log P_t 1_A^\delta(x) \quad (2.4)$$

$$\eta_A^\delta(t, x) = -t w_A^\delta(t, x) \quad (2.5)$$

$$u_A^\delta(t) = \int_{\Omega} -w_A^\delta(t, x) dm(x) \quad (2.6)$$

$$v_A^\delta(t) = \int_{\Omega} w_A^\delta(t, x)^2 dm(x) \quad (2.7)$$

と定義する。 1_A^δ の定義から (2.6),(2.7) の積分は可能で $u_A^\delta(t), v_A^\delta(t)$ はすべての $t \geq 0$ に対して有界で t の C^1 -関数である。 $w_A^0(t, x)$ は $w_A(t, x)$ と簡単に書くことにする。 u_A^0, v_A^0 についても同様である。 $w_A(t, x)$ は次の非線型熱方程式をみたす。

$$\frac{\partial w_A(t, x)}{\partial t} = L w_A(t, x) + \frac{1}{2} \Gamma(w_A(t, \cdot), w_A(t, \cdot))(x) \quad (2.8)$$

(1.5) から

$$\lim_{t \rightarrow 0} \eta_A(t, x) = d(A, x) \quad (2.9)$$

と期待されるがこのことは証明されず平均化した関数

$$\bar{\eta}_A(t, x) = \frac{1}{t} \int_0^t \eta_A(s, x) ds \quad (2.10)$$

についてこれより弱い結果 (2.18) が証明される. $w_A(t, x)$ の L^1 評価は日野氏によっても証明されている. L^1 評価については次のセクションで紹介する. さて Ramirez のアイデアを紹介しよう.

(1) L^2 評価 $\sup_{0 < t < \varepsilon} \|\eta_A(t, \cdot)\|_{L^2} < \infty$ を示す.

この証明には (2.1) から導かれる次の不等式を用いる. A を Ω の正の測度をもつ可測集合とすると

$$\int_{\Omega} \left(u - \frac{1}{m(A)} \int_A u(z) dm(z) \right)^2 dm(z) \leq \frac{1}{\lambda} \left(1 + \frac{1}{m(A)} \right) \mathcal{E}(u, u). \quad (2.11)$$

右辺の係数はもっとよい改良があるかもしれないがここではこだわらない. 日野氏の L^1 評価 (Lemma 4.1 [8]) (オリジナルは [5] Lemma 3.3.2にある) もスペクトルギャップ不等式を用いている. (1) は非線型方程式 (2.8) から得られるエネルギー等式とスペクトルギャップ不等式 (2.11) から $v_A(t)$ に関する微分不等式が得られ, それから証明される.

(2)

$$\sup_{0 < t \leq \varepsilon} \mathcal{E}_1(\bar{\eta}_A(t, \cdot), \bar{\eta}_A(t, \cdot)) < \infty \quad (2.12)$$

が証明される. 証明について簡単に述べる. (2.8) から $\eta_A(t, x)$ は次の方程式をみたすことがわかる.

$$\frac{\partial}{\partial t} (t\eta_A) = 2\eta_A + tL\eta_A - \frac{1}{2}\Gamma(\eta_A, \eta_A) \quad (2.13)$$

両辺を $[0, t] \times \Omega$ で積分し t で割り (1) の L^2 評価 (この段階では L^1 評価で十分!) と

$$\Gamma \left(\frac{1}{t} \int_0^t u(s, \cdot), \frac{1}{t} \int_0^t u(s, \cdot) ds \right) \leq \frac{1}{t} \int_0^t \Gamma(u(s, \cdot), u(s, \cdot)) ds \quad (2.14)$$

から得られる.

(3) (1), (2) の結果から任意の部分列 $\{t_k\}_{k=1}^{\infty} \downarrow 0$ について適当な部分列をとると $\eta_A(t_j, \cdot)$ が L^2 空間で $\bar{\eta}_A(t_j, \cdot)$ が \mathcal{E}_1 ノルムの与えられた Dirichlet space の元としてある元 $\eta_{A,0}(\cdot)$ に弱収束することがわかる. この段階でどうしても (1) の L^2 評価が必要のようである.

$$\eta_{A,0}(x) \leq \frac{d(A, x)^2}{2} \quad (2.15)$$

が示される. ただし

$$\mathcal{A}_A = \{u \in D(\mathcal{E}) \mid \Gamma(u, u) \leq 1, u \geq 0, u = 0 \text{ a.e. on } A\} \quad (2.16)$$

と定めるとき $d(A, x)$ は

- $d(A, x) \in \mathcal{A}_A$
- 任意の $u \in \mathcal{A}_A$ について $d(A, x) \geq u(x)$ a.e. となる.

をみたく一意的な関数として定義されている. (2.15) の導出について少し述べる. (2.13) の両辺に有界な正の関数 ϕ をかけて $[0, t] \times \Omega$ で積分して

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\Gamma(\bar{\eta}_A(t, \cdot), \bar{\eta}_A(t, \cdot)), \phi) &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t} \int_0^t \Gamma(\eta_A, \eta_A) ds, \phi \right) \\ &= 2(\bar{\eta}_A(t, \cdot), \phi) + \frac{1}{t} \int_0^t s \mathcal{E}(\eta_A, \phi) ds - (\eta_A(t, \cdot), \phi) \\ &\leq 2(\bar{\eta}_A(t, \cdot), \phi) + \frac{1}{t} \int_0^t s \mathcal{E}(\eta_A(s, \cdot))^{1/2} \mathcal{E}(\phi)^{1/2} ds \end{aligned}$$

$t \rightarrow 0$ で $\frac{1}{2} \Gamma(\eta_{A,0}, \eta_{A,0}) \leq 2\eta_{A,0}(x)$ すなわち

$$\Gamma(\sqrt{\eta_{A,0}}, \sqrt{\eta_{A,0}}) \leq 1. \quad (2.17)$$

しかし欲しい評価は 1 ではなくて $\frac{1}{2}$ である. $\frac{1}{2}$ にするには少し工夫を要する. $\frac{1}{2}$ にできたら $d(A, x)$ の性質から,

$$\sqrt{2\eta_{A,0}} \leq d(A, x)$$

となる.

さて不等式 (2.15) から

$$\limsup_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \int_0^T -t \log P_t 1_A^\delta(x) dt \leq \frac{d(A, x)^2}{2} \quad (2.18)$$

を得る. この結果から

$$\limsup_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \int_0^T -t \log P_t(A, B) dt \leq \frac{d(A, B)^2}{2} \quad (2.19)$$

が得られる.

(4) Wiener の Tauber 型評価から得られる次の定理を用いる.

補題 $f(t)$ を $[0, \varepsilon]$ で定義された実数値関数で

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t f(s) ds = 0$$

とする. さらに任意の $0 < s < t$ について

$$f(t) - f(s) \leq \frac{C}{s}(t - s) \quad (2.20)$$

とする. このとき

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 0.$$

この結果

ある $u \in D(\mathcal{E})$ ($\Gamma(u, u) \leq 1$) が存在して

$$B = \{x \in \Omega \mid u(x) > 0\} \quad (2.21)$$

とかけるとような Γ -regular set B について最終的な結論

$$\limsup_{t \rightarrow 0} -t \log P_t(A, B) \leq \frac{d(A, B)^2}{2}. \quad (2.22)$$

を得る.

Γ -regularity が必要になるのは $f(t) = -\log P_t(A, B)$ について不等式 (2.20) が証明できず modify した $\tilde{f}(t)$ について示され \tilde{f} の asymptotics から f の asymptotics を出すには Γ -regularity が必要になるのである. しかし, 日野氏は Γ_2 が下から有界という条件の下で任意の可測集合 A, B について (2.22) を証明している.

3 $w_A^\delta(t, x)$ の L^1 評価

以下の証明は Lemma 4.1([9]) と本質的に同じである. 次の評価が成立する.

Theorem 3.1 *Dirichlet form \mathcal{E} が spectral gap をもつ, i.e., 次を仮定する. $u \in D(\mathcal{E})$ に対して,*

$$\lambda \int_{\Omega} (u - \langle u \rangle)^2 dm(x) \leq \mathcal{E}(u, u) \quad (3.1)$$

(1) 簡単のため $m(A) = \varepsilon$ と書くことにする.

$$(1 - \varepsilon) \log\left(\frac{1}{\delta}\right) > 2 + \log\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) \quad (3.2)$$

をみたすように $0 < \delta < 1$ をとる. このとき

$$\int_{\Omega} -\log P_t 1_A^\delta(x) dm(x) \leq \max \left\{ 2 + \log\left(\frac{2}{\varepsilon}\right), \frac{2}{\lambda \varepsilon t + \frac{1}{(1-\varepsilon) \log\left(\frac{1}{\delta}\right)}} \right\} \quad (3.3)$$

(2)

$$\int_{\Omega} -\log P_t 1_A(x) dm(x) \leq \max \left\{ 2 + \log\left(\frac{2}{\varepsilon}\right), \frac{2}{\lambda \varepsilon t} \right\}. \quad (3.4)$$

(3) $\min \{m(A), m(B)\} \geq \varepsilon$ とする。このとき

$$\log (P_t 1_A, 1_B) \geq 2 \min \left\{ \log\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) - 2, -\frac{4}{\lambda \varepsilon t} \right\} \quad (3.5)$$

Proof. (1):

$$\begin{aligned} u_A^\delta(t) &= - \int_{\Omega} \frac{L P_t 1_A^\delta(x)}{P_t 1_A^\delta(x)} dm(x) \\ &= - \int_{\Omega} \frac{\Gamma(P_t 1_A^\delta)(x)}{P_t 1_A^\delta(x)^2} dm(x) \\ &= - \int_{\Omega} \Gamma(\log P_t 1_A^\delta)(x) dm(x) \\ &\leq -\lambda \int_{\Omega} (\log P_t 1_A^\delta(x) + u_A^\delta(t))^2 dm(x) \\ &= -\lambda u_A^\delta(t)^2 \int_{\Omega} \left(1 + \frac{\log P_t 1_A^\delta(x)}{u_A^\delta(t)}\right)^2 dm(x) \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\Omega_t := \{x \in \Omega \mid \log P_t 1_A^\delta(x) + u_A^\delta(t) \geq 2\} \quad (3.7)$$

とおく。ほとんどすべての $x \in A$ について

$$\lim_{t \rightarrow 0} \log P_t 1_A^\delta(x) + u_A^\delta(t) = (1 - \varepsilon) \log\left(\frac{1}{\delta}\right) > 2 + \log\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)$$

だから t が十分小ならば $m(\Omega_t) > 0$ となることに注意する。 $x \in \Omega_t$ ならば

$$0 \leq 1 + \frac{\log P_t 1_A^\delta(x)}{2 - \log P_t 1_A^\delta(x)} \leq 1 + \frac{\log P_t 1_A^\delta(x)}{u_A^\delta(t)} \leq 1. \quad (3.8)$$

ゆえに $x \in \Omega_t$ のとき

$$\left(1 + \frac{\log P_t 1_A^\delta(x)}{u_A^\delta(t)}\right)^2 \geq \left(\frac{2}{2 - \log P_t 1_A^\delta(x)}\right)^2 = \left(1 - \frac{\log P_t 1_A^\delta(x)}{2}\right)^{-2}. \quad (3.9)$$

$b \geq 0$ ならば $e^b \geq (1 + b/2)^2$. ゆえに $e^{-b} \leq (1 - \frac{b}{2})^{-2}$. したがって

$$a \leq 0 \implies e^a \leq \left(1 - \frac{a}{2}\right)^{-2}. \quad (3.10)$$

$a = \log P_t 1_A^\delta(x)$ にこの不等式を適用して

$$\left(1 - \frac{\log P_t 1_A^\delta(x)}{2}\right)^{-2} \geq e^{\log P_t 1_A^\delta(x)} = P_t 1_A^\delta(x).$$

(3.6) より

$$\begin{aligned} \dot{u}_A^\delta(t) &\leq -\lambda u_A^\delta(t)^2 \int_{\Omega_t} P_t 1_A^\delta(x) dm(x) \\ &= -\lambda u_A^\delta(t)^2 \left(\int_{\Omega} P_t 1_A^\delta(x) dm(x) - \int_{\Omega_t^c} P_t 1_A^\delta(x) dm(x) \right) \\ &\leq -\lambda u_A^\delta(t)^2 \left(\|1_A^\delta\|_{L^1} - e^{2-u_A^\delta(t)} \right) \\ &= -\lambda u_A^\delta(t)^2 \left(\varepsilon + \delta(1-\varepsilon) - e^{2-u_A^\delta(t)} \right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

(3.11) はすべての $t \geq 0$ で成立する。 $u_A^\delta(t)$ は t の連続な単調減少関数で

$$u_A^\delta(0) > 2 + \log\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)$$

だから

$$t_0 := \inf \left\{ t > 0 \mid u_A^\delta(t) \leq 2 + \log\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) \right\} > 0 \quad (3.12)$$

さて $t > t_0$ ならば

$$u_A^\delta(t) \leq 2 + \log\left(\frac{2}{\varepsilon}\right). \quad (3.13)$$

$0 \leq t \leq t_0$ ならば

$$\dot{u}_A^\delta(t) \leq -\lambda \left(\frac{\varepsilon}{2} + \delta(1-\varepsilon) \right) u_A^\delta(t)^2 \leq -\frac{\lambda}{2} \varepsilon u_A^\delta(t)^2.$$

したがって

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{u_A^\delta(t)} \right)' &\geq \frac{\lambda}{2} \varepsilon \\ \frac{1}{u_A^\delta(t)} - \frac{1}{u_A^\delta(0)} &\geq \frac{\lambda \varepsilon}{2} t. \end{aligned} \quad (3.14)$$

(3.13), (3.14) は (1) の結論を示している。

(2):

$$\begin{aligned} -\log P_t 1_A^\delta(x) &\geq 0 \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} -\log P_t 1_A^\delta(x) &= -\log P_t 1_A(x) \end{aligned}$$

だから (1) と Fatou の補題より結論を得る.

(3): Jensen の不等式と (2) を用いて

$$\begin{aligned} \log(P_t 1_A, 1_B) &= \log(P_{t/2} 1_A, P_{t/2} 1_B) \\ &\geq \int_{\Omega} \log P_{t/2} 1_A(x) dm(x) + \int_{\Omega} \log P_{t/2} 1_B(x) dm(x) \\ &\geq 2 \min \left\{ \log\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) - 2, -\frac{4}{\lambda \varepsilon t} \right\} \end{aligned}$$

■

(3) の不等式は UPIP の成立を示している. これは日野 [8] で示されている.

4 今後の問題

(1) リーマン多様体 M 上のパス空間 $P_x(M) = C([0, 1] \rightarrow M)$ 上に自然に local な Dirichlet form が定義され拡散過程が定まる. この Dirichlet form については Fang によってスペクトルギャップの存在が証明されているので Ramirez の結果を適用できる. 距離関数 $d(A, x)$ は上で述べたように定義されている. $d(A, x)$ を [3],[6] のようにもう少し幾何学的に定義できないだろうか? これは $P_x(M)$ 上の Dirichlet form の拡大の一意性に関する問題である.

(2)

$$P_{\varepsilon}(A, B) = P_m(X(0) \in A, X(\varepsilon) \in B) \quad (4.1)$$

である. ここで $X(t)$ は Dirichlet form (1.1) で定まる拡散過程である. C を $C([0, 1] \rightarrow \Omega)$ の部分集合とする. $P_m(X(\varepsilon \cdot) \in C)$ の $\varepsilon \rightarrow 0$ の asymptotics はどうなるのであるか? (4.1) はもちろん

$$C = \{\gamma \mid \gamma(0) \in A, \gamma(1) \in B\}$$

の場合である. とくに $P_x(M)$ のときはどうなるか考えると面白いかも知れない.

(3) スペクトルギャップの存在, Γ -regularity をはずせないだろうか?

(4) 問題と言うよりは簡単な注意を与える. リーマン多様体 M 上のループ空間 $C([0, 1] \rightarrow M \mid \gamma(0) = \gamma(1) = x)$ 上の Dirichlet form を考えると M 上の heat kernel $p(t, y, z)$ の対数 2 階微分の asymptotics $\lim_{t \rightarrow 0} t \nabla_z^2 \log p(t, y, z)$ を考える必要がある (c.f. 成果報告書「熱核の対数微分とループ空間上の対数ソボレフ不等式」). 上記の short time asymptotics で必要になる 1 階微分 $t \nabla_z \log p(t, y, z)$ は L^2 評価をもつなど singularity は発生しないが (例えばコンパクト多様体では実際は一様な評価が成立する).

二階微分 $t\nabla_z^2 \log p(t, y, z)$ の方は z が y の cut-locus の中にあると $t \rightarrow 0$ で発散する. (ただし, cut-locus の集合は測度 0 だから L^1 あるいは L^2 評価があるかもしれない.)

このようにさらに多様体の細かい情報が必要になる. Asymptotics (1.2), (1.5) の収束の早さを調べる時このような幾何学的な状況を調べる必要があるのかも知れない.

参考文献

- [1] S. Aida, Uniform positivity improving property, Sobolev inequality and spectral gaps, J. Funct. Anal **158** (1998), pp152–185.
- [2] S. Aida, On the irreducibility of Dirichlet forms on a domain in infinite dimensional spaces, to appear in Osaka J. Math.
- [3] S. Aida and H. Kawabi, Short time asymptotics of certain infinite dimensional diffusion processes, to appear in the proceedings of the 7-th Workshop of Stochastic analysis and related topics, Birkhäuser.
- [4] S. Aida and T. S. Zhang, On the small time asymptotics of diffusion processes on path groups, to appear in Potential Analysis.
- [5] E.B. Davies, Heat Kernels and Spectral Theory, Cambridge Univ. Press, Cambridge, U.K, (1989).
- [6] S. Fang, On the Ornstein-Uhlenbeck process, Stochastic and Stochastic Reports **46** (1994), pp141–159.
- [7] S. Fang and T.S. Zhang, On the small time behavior of Ornstein-Uhlenbeck processes with unbounded linear drifts, Prob. Th. Rel. Fields **114** (1999), pp487–504.
- [8] M. Hino, Exponential decay of positivity preserving semigroups on L^p , to appear in Osaka J. Math.
- [9] M. Hino, On short time asymptotic behavior of some symmetric diffusions on general state spaces, submitted, 1999.
- [10] J. Ramirez, Short time asymptotics in Dirichlet spaces, submitted, 1999.